Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Exemplarische Typ-2-Aufgaben

Mathematik (AHS)

Die beiden freigegebenen (bereits feldgetesteten) Typ-2-Aufgaben stehen prototypisch für diesen Aufgabentyp, der erstmals zum Schulversuch 2014 in der Praxis Einsatz finden wird. Anhand der Strukturierung der Aufgaben kann nachvollzogen werden, wie sich die im Konzept zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik (verfügbar unter https://www.bifie.at/node/1442) formulierten theoretischen Grundsätze umsetzen lassen. Allgemein sollen diese beiden Aufgaben sowohl Lehrerinnen und Lehrern als auch Schülerinnen und Schülern als Hilfestellung für die Vorbereitung auf die standardisierte schriftliche Reifeprüfung dienen.

Zudem soll erwähnt werden, dass bei der Aufgabe *Produktionskosten* Begriffe aus dem Kontextkatalog in der Aufgabenstellung relativ ausführlich erklärt sind, um die Bearbeitung zu erleichtern. Da es sich hierbei um Übungsmaterial handelt, wurde diese Vorgehensweise bewusst gewählt. Prinzipiell sollen die Schüler/innen aber mit den Begriffen aus dem Kontextkatalog derart umgehen können, dass eine vertiefende Erklärung in Zukunft nicht mehr nötig ist.

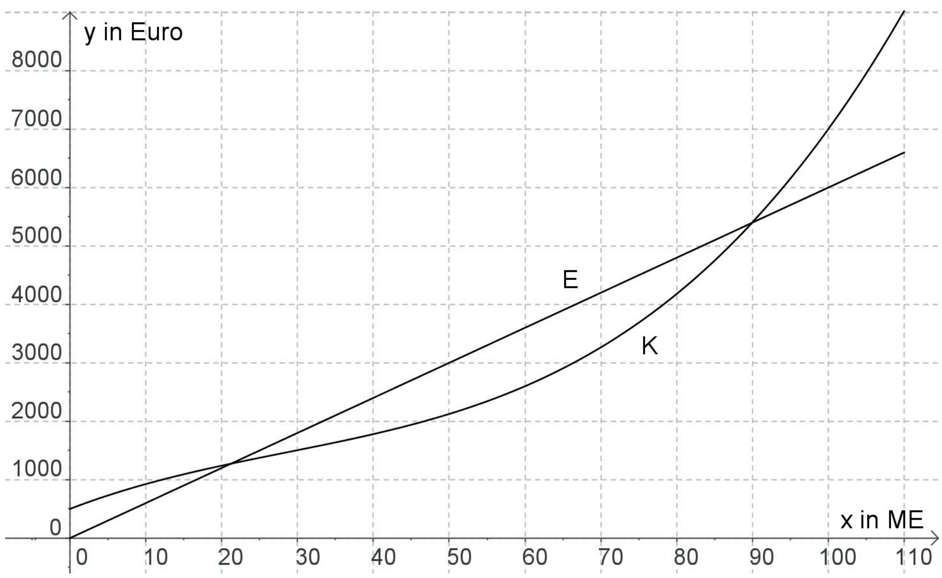
Team SRP Mathematik (AHS)

Aufgabe 1

Produktionskosten

Die Produktionskosten eines Betriebes setzen sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammen und können durch eine Kostenfunktion beschrieben werden. Fixkosten fallen auf jeden Fall an und sind unabhängig von der produzierten Menge. Variable Kosten hingegen nehmen mit steigender Produktionsmenge zu.
Die Kostenkehre ist jene Produktionsmenge, ab der die variablen Kosten immer stärker steigen, in diesem Fall spricht man von einem progressiven Kostenverlauf. Vor der Kostenkehre ist der Kostenverlauf degressiv, das heißt, die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer schwächer.
Der Verkaufserlös ist das Produkt aus der verkauften Stückzahl und dem Verkaufspreis pro Stück.

Die untenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E des Betriebes, wobei x die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag ist. 1 ME entspricht einer Verpackungseinheit von 100 Stück. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.
Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Produktionskosten.



Aufgabenstellung:

a)
Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich, das sind jene Stückzahlen (1 ME = 100 Stück), für die der Betrieb Gewinn erzielt!
Beschreiben Sie, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Verlauf des Graphen der Erlösfunktion E auswirkt und wie sich dadurch der Gewinnbereich verändert!

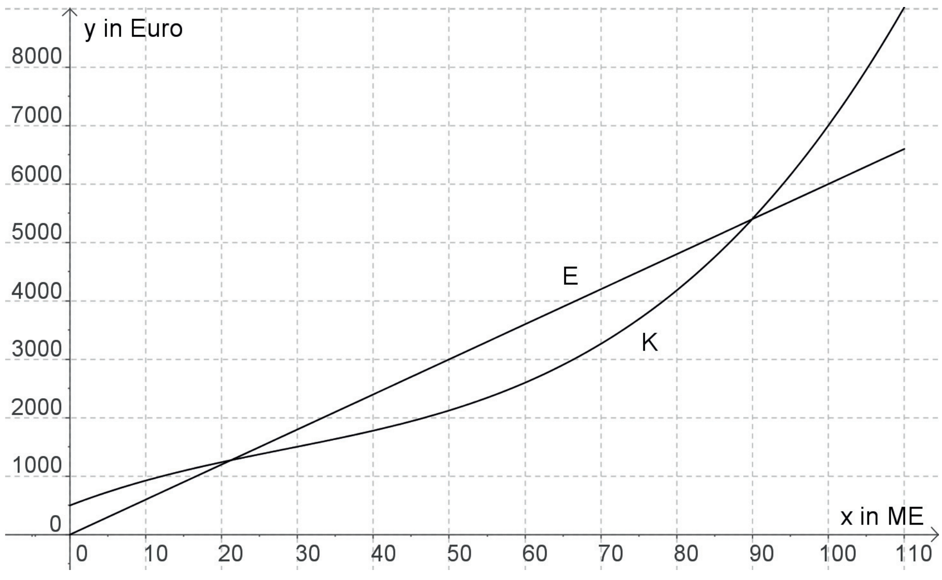
b)
Bestimmen Sie anhand der Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME möglichst genau!

c)
Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die in der Grafik abgebildeten Produktionskosten zu?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Bei degressivem Kostenverlauf gilt: $K'(x) < 0$.	☐
Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	☐
Bei der Kostenkehre gilt: $K'(x) = 0$.	☐
Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.	☐
Es gilt: $K'(50) > K'(90)$.	☐

Erklären Sie ausführlich, was die 1. und die 2. Ableitung der Kostenfunktion an einer bestimmten Stelle über den Verlauf des Graphen von K an dieser Stelle aussagen!

d)
Deuten Sie die Beziehung $K'(x) = E'(x)$ geometrisch und ermitteln Sie anhand der nachstehenden Abbildung jene Produktionsmenge x_1, für die dies zutrifft!
Begründen Sie, warum der erzielte Gewinn bei dieser Produktionsmenge x_1 am größten ist!



Lösungserwartung zur Aufgabe *Produktionskosten*

a)
Die Anwort ist als richtig zu werten, wenn **beide** Grenzen des Grenzbereichs richtig angegeben sind, z. B.: *Bei einer Produktion von 2100 bis 9000 Stück wird Gewinn erzielt* (Toleranz bei Gewinngrenzen: ± 100 Stück).

Weiters muss eine richtige Interpretation angeführt sein, wie sich eine Senkung des Verkaufspreises auf den Gewinnbereich auswirkt, z. B.: *Bei einer Senkung des Verkaufspreises verläuft der Graph von E flacher, wodurch der Gewinnbereich kleiner („schmäler“) wird.*

Als richtig zu werten ist auch die Antwort, dass bei einer starken Senkung des Verkaufspreises bei allen Produktionsmengen Verlust erzielt wird.

b)
Fixkosten: 500 Euro (Toleranz: ± 100 Euro)

Verkaufspreis pro ME: $\frac{3000}{50} =$ 60 Euro (Toleranz: ± 5 Euro)

Falls der Verkaufspreis durch ein „zu kleines“ Steigungsdreieck sehr ungenau abgelesen wird (z. B. 50 Euro), so ist das Ergebnis als falsch zu werten.

c)
Es müssen die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sein.

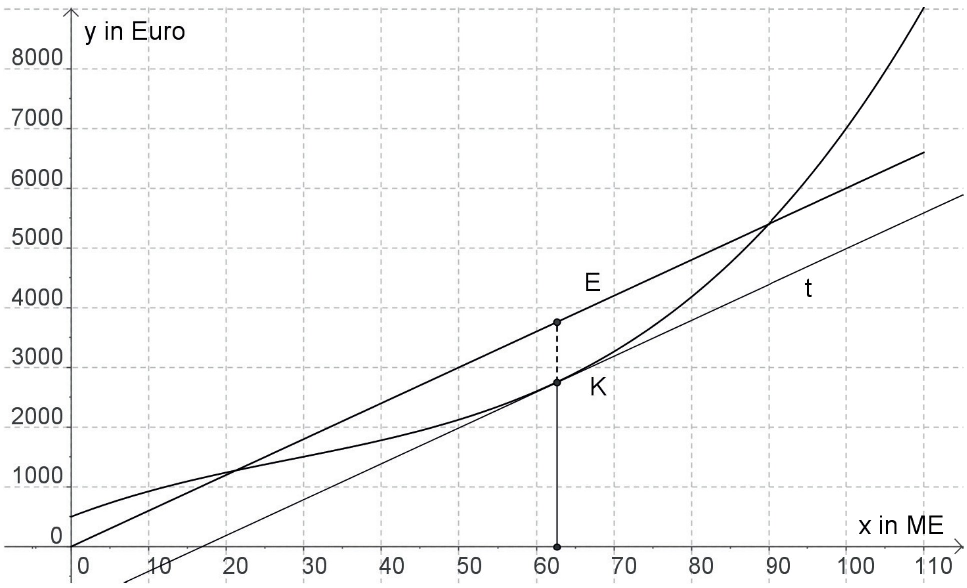
	☐
Bei progressivem Kostenverlauf gilt: $K''(x) > 0$.	☒
	☐
Für alle x aus dem Definitionsbereich [0 ME; 110 ME] gilt: $K'(x) > 0$.	☒
	☐

Zudem muss eine Erklärung angegeben sein, z. B.: *K'(x) beschreibt die Steigung der Kostenfunktion (oder: Steigung der Tangente) an der Stelle x (bei Produktion von x ME).*
K''(x) beschreibt die Änderung der Steigung, also das Krümmungsverhalten der Kostenfunktion an der Stelle x.
Im degressiven Bereich ist der Graph von K rechtsgekrümmt und im progressiven Bereich ist der Graph von K linksgekrümmt.
Auch folgende bzw. alle anderen inhaltlich richtigen Formulierungen sind als richtig zu werten:
K' beschreibt das Monotonieverhalten von K, d. h. falls K'(x) > 0 ist, steigt K an der Stelle x.
K'' beschreibt das Monotonieverhalten von K', d. h. falls K''(x) > 0 ist, steigt K' an der Stelle x (d. h., die Kostensteigerung nimmt zu).
Anmerkung: Aus der Antwort muss jedenfalls ersichtlich sein, welche geometrische Bedeutung *K'* und *K''* besitzen, der Begriff *Monotonieverhalten* alleine ist nicht ausreichend.

d)
Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn die richtige geometrische Deutung angegeben ist und x_1 bestimmt ist (falls x_1 nur eingezeichnet ist, der Wert aber nicht angegeben ist, so ist dies auch als richtig zu werten), z. B.: *Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von K und der Graph von E an dieser Stelle die gleiche Steigung besitzen.*
Oder: *Die Tangente t an den Graphen von K verläuft parallel zum Graphen von E.*
Dies ist bei ca. 63 ME der Fall (Toleranz: ± 3 ME).

Zudem muss die Interpretation angegeben sein, dass an der gesuchten Stelle $G'(x) = 0$ gilt und somit $G(x_1)$ der maximale Gewinn ist, z. B.: *Wegen der Beziehung $G(x) = E(x) – K(x)$ gilt: $G'(x) = E'(x) – K'(x)$.*
Somit gilt: $G'(x_1) = E'(x_1) – K'(x_1) = 0$ und $G(x_1)$ ist daher der maximale Gewinn.
(Anmerkung: Der Nachweis des Maximums (Monotoniewechsel von G an der Stelle x_1) ist nicht erforderlich.)

Auch die geometrische Begründung, dass der vertikale Abstand zwischen Erlös- und Kostenkurve an der Stelle x_1 am größten ist, ist als richtig zu werten, falls dieser Abstand (strichlierte Linie) richtig eingezeichnet ist.



Aufgabe 2

Emissionen

Laut Immissionsschutzgesetz – Luft (IG-L) gilt auf manchen Autobahnabschnitten in Österreich für PKW eine Tempo-100-Beschränkung, wenn die Grenzwerte für bestimmte Luftschadstoffe überschritten werden. Für LKW gilt ein generelles Tempolimit von 80 km/h.
Abbildung 1 zeigt vier Messwerte für die freigesetzte Menge von Stickoxiden (NO_x) bei unterschiedlichen Fahrgeschwindigkeiten (in km/h) für einen durchschnittlichen PKW. Die freigesetzte NO_x-Menge wird in Gramm pro gefahrenem Kilometer angegeben. Die Abhängigkeit von Fahrgeschwindigkeit und NO_x-Ausstoß wurde durch eine Funktion *A* modelliert, deren Graph ebenfalls in Abbildung 1 dargestellt ist.
Abbildung 2 zeigt den Anteil der Verkehrsmittel (PKW, LKW, sonstige) am Verkehrsaufkommen und am Ausstoß (= Emission) von Stickoxiden und Feinstaub (PM 10) im Unterinntal in Tirol.

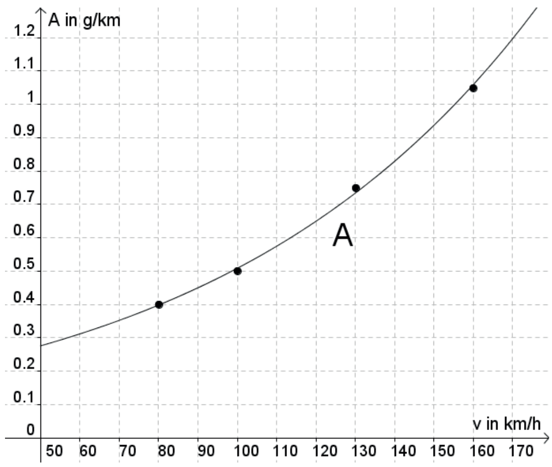


Abbildung 1

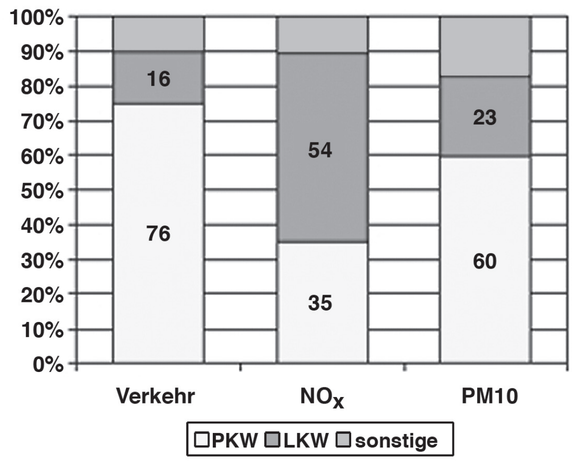


Abbildung 2

Quelle: http://www.tirol.gv.at/themen/verkehr/verkehrsplanung/verkehrsprojekte/tempo100

Aufgabenstellung:

a)
Ermitteln Sie anhand der Messwerte in Abbildung 1, um wie viele Prozent der Stickoxid-Ausstoß eines PKW abnimmt, wenn statt der sonst erlaubten 130 km/h nur mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h gefahren werden darf!
Ist der Stickoxid-Ausstoß eines PKW direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Modellfunktion *A* in Abbildung 1.

b)
Verursachen im Tiroler Unterinntal die Verkehrsmittel mit dem größten Anteil am Verkehrsaufkommen auch die meisten Stickoxid- bzw. Feinstaub-Emissionen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Geschwindigkeitsmessungen auf der Autobahn A12 im Tiroler Unterinntal haben gezeigt, dass die Geschwindigkeitslimits von mehr als 90 % der Verkehrsteilnehmer/innen eingehalten

werden und weniger als 1 % der Verkehrsteilnehmer/innen die Geschwindigkeitslimits um mehr als 10 % überschreiten. Die Geschwindigkeitsüberschreitungen können daher für die folgende Fragestellung vernachlässigt werden.
Begründen Sie, welche der beiden Maßnahmen (A oder B) wirkungsvoller ist, wenn entlang der A12 die Stickoxid-Emissionen weiter reduziert werden sollten! Durch Maßnahme A eventuell anfallende zusätzliche Emissionen durch die Bahn werden vernachlässigt.

A eine Verlagerung der Hälfte des Gütertransports durch LKW auf die Schiene (d. h. Transport der LKW mit der Bahn)

B ein Tempolimit von 80 km/h für PKW und LKW

Entnehmen Sie die für die Begründung benötigten Werte den Abbildungen 1 und 2 und führen Sie diese an!

c)

Ermitteln Sie rechnerisch anhand von Abbildung 1 das Ergebnis des Ausdrucks $\frac{A(160) - A(100)}{60}$ auf vier Dezimalstellen genau!
Interpretieren Sie das Ergebnis dieses Ausdrucks im Hinblick auf die NO_x-Emissionen!

d)
Zur Modellierung der in Abbildung 1 dargestellten Abhängigkeit des NO_x-Ausstoßes A von der Fahrgeschwindigkeit v kommen unterschiedliche Funktionstypen in Frage.

Welche Funktionstypen können zur Modellierung der Funktion A verwendet worden sein? Kreuzen Sie die beiden geeigneten Funktionsgleichungen an!

$A(v) = a \cdot v + b$ mit $a > 0, b > 0$	☐
$A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$	☐
$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0, c > 0, b \in \mathbb{R}$	☐
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b > 1$	☐
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$	☐

Begründen Sie, warum die drei restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung von A in Abbildung 1 nicht geeignet sind!

Lösungserwartung zur Aufgabe *Emissionen*

a)
Richtige Berechnung der Abnahme der NO_x-Emissionen: $\frac{0,5}{0,75} \approx 0,67$.

Der Stickoxid-Ausstoß nimmt um ungefähr 33 % ab. Alle Ergebnisse im Intervall [30 %; 35 %] sind als richtig zu werten.

Auch die Antwort, dass die Emissionen bei einer Reduktion der Geschwindigkeit auf 100 km/h nur mehr 67 % des Wertes bei 130 km/h betragen, ist als richtig zu werten (Lösungsintervall, falls die noch vorhandenen Emissionen angegeben werden: [65 %; 70 %]).

Zudem muss eine Begründung angegeben sein, dass *A* nicht direkt proportional zu *v* ist, z. B.: *Der Stickoxid-Ausstoß ist nicht direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit, weil der Graph von A nicht linear verläuft.*

Auch andere, aus der Abbildung ableitbare Formulierungen wie z. B. *Nicht direkt proportional, weil sich die Emissionen mehr als verdoppeln, wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird*, aufgrund derer eine direkte Proportionalität ausgeschlossen werden kann, sind als richtig zu werten.

b)
Die Antwort ist als richtig zu werten, wenn sinngemäß begründet ist, dass PKW zwar den größten Anteil an den Feinstaub-Emissionen besitzen, bei den Stickoxid-Emissionen aber die LKW die Hauptverursacher sind, z. B.: *Im Tiroler Unterinntal haben PKW mit 76 % den größten Anteil am Verkehrsaufkommen. Sie verursachen mit 60 % zwar den größten Anteil der Feinstaub-Emissionen, aber nur 35 % der Stickoxid-Emissionen.*
Anmerkung: Die Zahlenwerte müssen nicht angeführt sein.

Zudem muss eine schlüssige Begründung angegeben werden, dass Maßnahme *A* wirkungsvoller für eine Stickoxid-Reduktion ist, z. B.: *LKW verursachen 54 % der NO_x-Emissionen im Straßenverkehr, obwohl ihr Anteil am Verkehrsaufkommen nur 16 % beträgt. Eine Reduktion des LKW-Verkehrs auf die Hälfte würde die NO_x-Emissionen um ca. 27 % reduzieren.*
PKW haben zwar einen Anteil von 76 % am Verkehrsaufkommen, sind aber nur für 35 % der NO_x-Emissionen verantwortlich. Durch eine Reduktion des Tempolimits von 130 km/h auf 80 km/h könnten laut Abbildung 1 maximal die Hälfte dieser Emissionen, also etwa 17 %, vermieden werden. Eine Verlagerung der Hälfte des LKW-Verkehrs auf die Schiene wäre daher die wirkungsvollere Maßnahme zur Reduktion der NO_x-Emissionen.
Anmerkung: Auch eine Begründung mit gerundeten relativen Anteilen (*drei Viertel* etc.) ist als richtig zu werten.

c)
Richtige Berechnung des Differenzenquotienten: $\frac{A(160)-A(100)}{60} = \frac{1{,}05-0{,}5}{60} \approx 0{,}0092$,

wobei Ergebnisse aus dem Intervall [0,0088; 0,0095] als richtig zu werten sind. Die Angabe der Einheit ist nicht erforderlich.

Zudem muss der Differenzenquotient richtig interpretiert werden, z. B.: *Wenn die Geschwindigkeit von 100 km/h auf 160 km/h erhöht wird, beträgt die mittlere Zunahme der NO_x-Emissionen 0,0092 g/km pro km/h.*
Auch analoge Formulierungen wie z. B. *mittlere Änderungsrate des Stickoxid-Ausstoßes* sind als richtig zu werten. Das Geschwindigkeitsintervall [100 km/h; 160 km/h] muss in der Interpretation in irgendeiner Form vorkommen.

d)
Es müssen die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sein.

	☐
	☐
$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0$, $c > 0$, $b \in \mathbb{R}$	☒
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0$, $b > 1$	☒
	☐

Zudem müssen drei sinngemäß richtige Begründungen angegeben sein, warum die restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung nicht geeignet sind, z. B.:

Der Graph von $A(v) = a \cdot v + b$ ist linear und daher nicht geeignet.
Der Graph von $A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0$, $b > 0$ ist eine nach unten geöffnete Parabel und daher nicht geeignet.
Der Graph von $A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0$, $b < 1$ ist fallend und daher nicht geeignet.