

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

12. Jänner 2017

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 5)

Korrekturheft

Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im Erlass mit der Geschäftszahl BMBF-17.100/0006-II/2015 des Bundesministeriums für Bildung und Frauen.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A (KA)* umfasst die unabhängig¹ erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B (KB)* umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufen 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche“ eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen“ wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend“ (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punktermittlung soll die Arbeit der Kandidatin/des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist von der Prüferin/vom Prüfer ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

44–49 Punkte	Sehr gut
38–43 Punkte	Gut
32–37 Punkte	Befriedigend
22–31 Punkte	Genügend
0–21 Punkte	Nicht genügend

¹ Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur ein möglicher Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.
2. Der Lösungsschlüssel ist **verbindlich** anzuwenden unter Beachtung folgender Vorgangsweisen:
 - a. Punkte sind nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung vollständig erfüllt ist.
 - b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.
 - c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin/vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.
 - d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin/vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.
 - e. Werden von der Kandidatin/vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.
 - f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin/des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.
 - g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.
 - h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.
 - i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.
3. Sind Sie sich als Korrektor/in über die Punktevergabe nicht schlüssig, können Sie eine Korrekturanfrage an das BMB (via Telefon-Hotline oder Online-Helpdesk) stellen.

Aufgabe 1

Körpergröße

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$\bar{x} = 178,6 \text{ cm}$$

$$\sigma = 7,499... \text{ cm} \approx 7,5 \text{ cm} \text{ bzw. } s = 7,904... \text{ cm} \approx 7,9 \text{ cm}$$

Messwerte, die für die fehlerhafte Eingabe in Frage kommen: 168, 169, 171, 174, 179

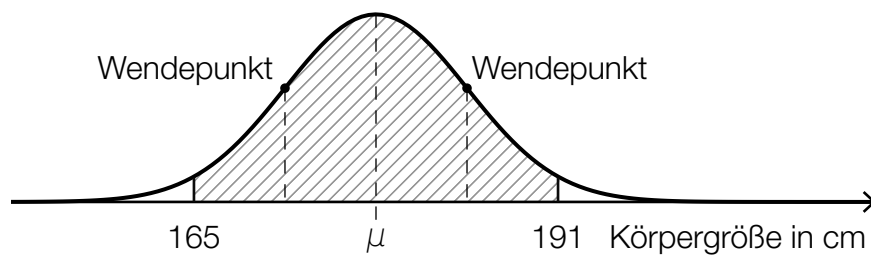
b) X ... Körpergröße eines zufällig ausgewählten Studenten in cm

$$P(X \geq a) = 0,8$$

Berechnung von a mittels Technologieeinsatz:

$$a = 172,52... \text{ cm}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % wird eine Körpergröße von rund 172,5 cm überschritten.



Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittelwerts und der Standardabweichung (KA)

1 × C: für die richtige Angabe aller Werte, die für die fehlerhafte Eingabe in Frage kommen (KB)

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Körpergröße (KA)

1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der gegebenen Abbildung (Intervall: $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$) (KA)

Aufgabe 2

Vernetzte Welt

Möglicher Lösungsweg

a) $F(t) = F_0 \cdot a^t$

$$F_0 = 5,5$$
$$820 = 5,5 \cdot a^6 \Rightarrow a = \sqrt[6]{\frac{820}{5,5}} = 2,30272\dots \approx 2,3027$$
$$F(t) = 5,5 \cdot 2,3027^t$$

b) 12 Jahre entsprechen der 8-fachen Verdoppelungszeit $\left(\frac{12}{1,5} = 8\right)$.
 $2^8 = 256$

Die Behauptung ist daher falsch.

c) Binomialverteilung:
 X ... Anzahl der Bauteile, die innerhalb eines Jahres ausfallen
 $n = 10, p = 0,02$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,1829\dots \approx 18,3 \%$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung (KA)
- b) 1 × D: für den richtigen Nachweis (KA)
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)

Aufgabe 3

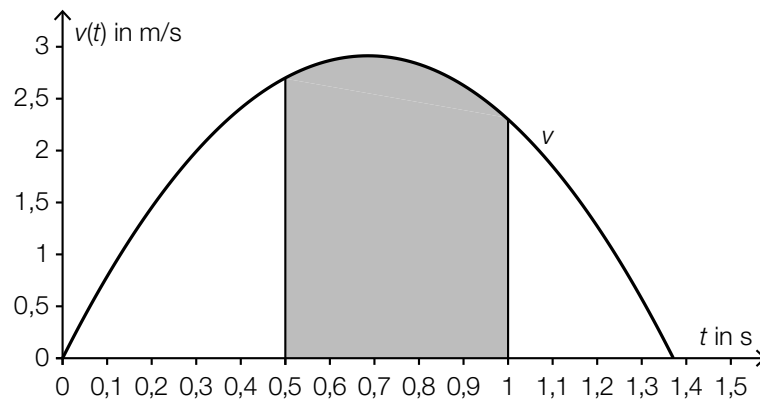
Skatepark

Möglicher Lösungsweg

a) $A = (2 \cdot a + b) \cdot h - b \cdot r - \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

$$1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = \frac{10^6 \text{ g}}{10^6 \text{ cm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

b)



$v'(0,3)$ ist die Beschleunigung der Skaterin zum Zeitpunkt $t = 0,3$ s.

c) $\bar{v} = \frac{1,5}{0,6} = 2,5$

Toleranzbereich für \bar{v} : $[2,1; 2,9]$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 2,5 m/s.

d) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
 $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$$f(0) = 160$$

$$f(20) = 0$$

$$f'(0) = \tan(-80^\circ)$$

$$c = 160$$

oder: $400 \cdot a + 20 \cdot b + c = 0$

$$b = \tan(-80^\circ)$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel (KA)
1 × D: für den richtigen Nachweis (KA)
- b) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen des Weges (KA)
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
- c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Geschwindigkeit im Toleranzbereich $[2,1; 2,9]$ (KA)
- d) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte A und B (KA)
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe des gegebenen Winkels (KB)

Aufgabe 4

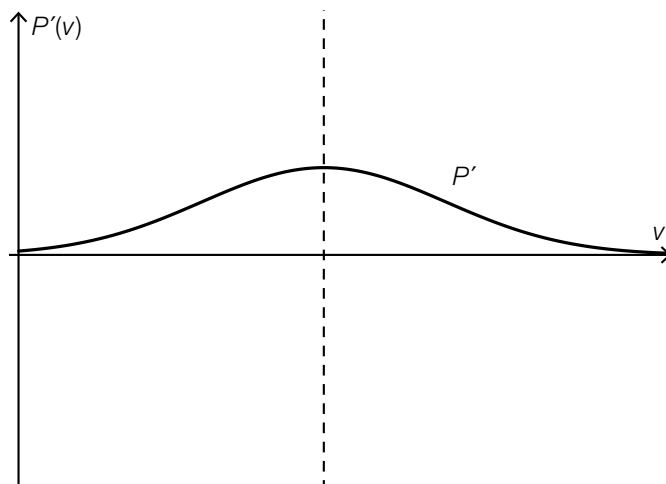
Windräder

Möglicher Lösungsweg

a) $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \Rightarrow P_N = c \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$
 $0,85 = 0,169 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$
 $d = 80,02\dots$

Der Durchmesser beträgt rund 80,0 m.

b) zum Beispiel:



c) $0,5 = 0,0175 \cdot v^2 - 0,0796 \cdot v + 0,0391$

$v_1 = 7,887\dots$
 $(v_2 = -3,339\dots)$

Eine Leistung von 0,5 MW wird bei einer Windgeschwindigkeit von rund 7,89 m/s erzielt.

Es wird die relative Änderung der Leistung des Windrads bei einem Anstieg der Windgeschwindigkeit von 7 m/s auf 8 m/s ermittelt.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers (KA)
- b) 1 × A1: für die richtige Darstellung (Wendestelle von P als Maximumstelle von P') (KB)
1 × A2: für die richtige Darstellung (Vorzeichen der Ableitungsfunktion $P'(P'(v) > 0)$ und Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion P') (KB)
Das Krümmungsverhalten von P' ist für die Punktevergabe nicht relevant.
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Windgeschwindigkeit (KA)
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KB)

Aufgabe 5

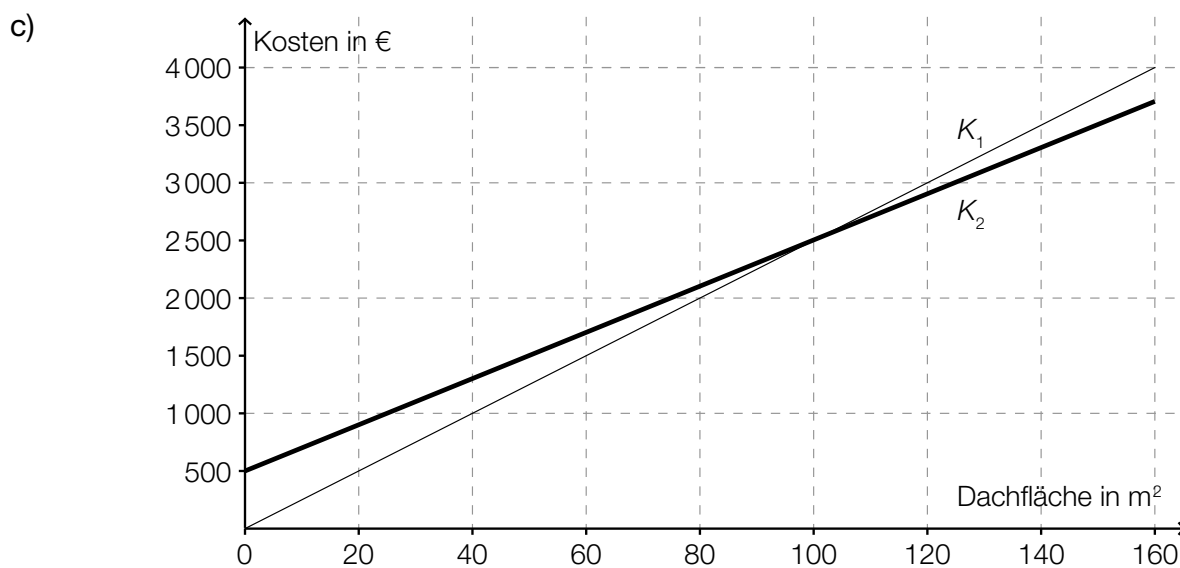
Hausbau

Möglicher Lösungsweg

a) $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{a}\right)$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2,2}{3,5}\right) = 32,15\dots^\circ \approx 32,2^\circ$$

b) $b = 6,5 \cdot \cos(38^\circ) - 4,25$
 $b = 0,872\dots \text{ m} \approx 0,87 \text{ m}$



Aus der Abbildung entnimmt man, dass für 120 m² Dachfläche das Angebot 2 kostengünstiger ist.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels (KB)
- b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung von b (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung von b (KB)
- c) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Graphen (KA)
1 × C: für das richtige Ablesen (KB)

Aufgabe 6 (Teil B)

Flugbahnen

Möglicher Lösungsweg

- a) Da sich der Scheitel der dargestellten Parabel im Ursprung des Koordinatensystems befindet, gilt: $b = 0$ und $c = 0$.

Da der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist, gilt: $a < 0$.

$$-0,08 = a \cdot 100^2 \Rightarrow a = -8 \cdot 10^{-6}$$

- b) Koeffizientenvergleich:
 $0,03492 = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = 1,99\dots^\circ$

$$7,192 \cdot 10^5 = 2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(1,99\dots^\circ) \Rightarrow v = 600,0\dots \approx 600$$

Die Abschussgeschwindigkeit beträgt rund 600 m/s.

- c) $\frac{dx}{d\alpha} = 0$:
 $\frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] = 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \sin(\alpha) \Rightarrow \alpha = 45^\circ$
 $\frac{d^2x}{d\alpha^2} < 0$ für $\alpha = 45^\circ$:
 $\frac{d^2x}{d\alpha^2} = -\frac{8 \cdot v^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) < 0$, wenn $0 < \alpha < 90^\circ$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D1: für die richtige Begründung zu den Parametern b und c (KA)
1 × D2: für die richtige Begründung zum Vorzeichen des Parameters a (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Parameters a (KA)
- b) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung von α (Koeffizientenvergleich) (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Abschussgeschwindigkeit (KB)
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels (KA)
1 × D: für den richtigen Nachweis (KB)

Aufgabe 7 (Teil B)

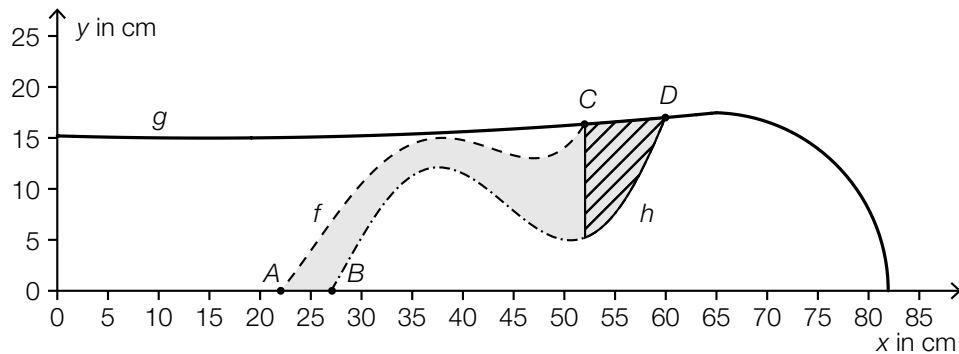
Snowboard

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
 $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$f(22) = 0$		$22^4 \cdot a + 22^3 \cdot b + 22^2 \cdot c + 22 \cdot d + e = 0$
$f(38) = 15$		$38^4 \cdot a + 38^3 \cdot b + 38^2 \cdot c + 38 \cdot d + e = 15$
$f'(38) = 0$	oder:	$4 \cdot 38^3 \cdot a + 3 \cdot 38^2 \cdot b + 2 \cdot 38 \cdot c + d = 0$
$f(47) = 13$		$47^4 \cdot a + 47^3 \cdot b + 47^2 \cdot c + 47 \cdot d + e = 13$
$f'(47) = 0$		$4 \cdot 47^3 \cdot a + 3 \cdot 47^2 \cdot b + 2 \cdot 47 \cdot c + d = 0$

b)



$$A_3 = \int_{52}^{60} [g(x) - h(x)] dx$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte (KA)
 1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung (KA)
- b) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der fehlenden Teilfläche (KA)
 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel (KB)

Aufgabe 8 (Teil B)

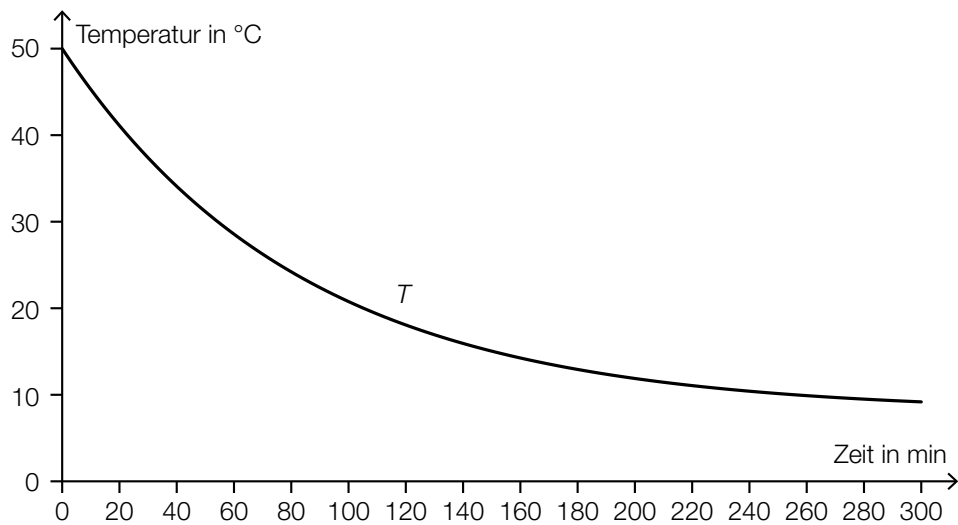
Kalt – warm

Möglicher Lösungsweg

a) $a = 70$

Im Intervall $[0; b]$ beträgt die mittlere Temperatur $60\text{ }^\circ\text{C}$.

b)



Gleichung der Tangente(nfunktion): $f(t) = k \cdot t + d$

$$k = T'(0) = -0,5$$

$$d = 50$$

$$\Rightarrow f(t) = -0,5 \cdot t + 50$$

$$8 + 42 \cdot e^{-\frac{t}{84}} - (-0,5 \cdot t + 50) = 2$$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz für $t > 0$: $t = 27,3\dots$

Zeitintervall: $[0; 27]$

- c) Für $T > T_U$ handelt es sich um einen Abnahmeprozess, also muss $\frac{dT}{dt}$ negativ sein. Da $(T - T_U)$ positiv ist, muss also k negativ sein.

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_U)$$

$$\frac{dT}{T - T_U} = k \cdot dt \quad (\text{oder: } \frac{T'}{T - T_U} = k)$$

$$\int \frac{dT}{T - T_U} = k \cdot \int dt \quad (\text{oder: } \int \frac{T'(t)}{T(t) - T_U} dt = k \cdot \int dt)$$

$$\ln|T(t) - T_U| = k \cdot t + C_1$$

$$\text{allgemeine Lösung: } T(t) = T_U + C \cdot e^{k \cdot t}$$

$$T(0) = T_0 \Rightarrow T_0 = T_U + C$$

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{k \cdot t}$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der Konstanten a (KA)
1 × C2: für die richtige Interpretation der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang (KB)
- b) 1 × B1: für das richtige Darstellen des Temperaturverlaufs in den ersten 5 Stunden (KA)
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Tangente (KA)
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Zeitintervalls (KB)
- c) 1 × D: für die richtige Argumentation (KA)
1 × B1: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Lösung mit $T(0) = T_0$ (KB)

Aufgabe 9 (Teil B)

CO₂-Gehalt der Luft

Möglicher Lösungsweg

- a) $0,0011 \cdot 800 \text{ m}^3 = 0,88 \text{ m}^3$
Das CO₂-Volumen beträgt 0,88 m³.

$$\frac{dV}{dt} = 2,5 \cdot 0,0004 - 2,5 \cdot \frac{V}{800}$$

- b) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
 $\bar{x} = 3167,14... \text{ ppm}$
 $s = 603,17... \text{ ppm}$

Zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich mithilfe der t -Verteilung bestimmen:

$$\bar{x} \pm t_{f; 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$n = 7 \Rightarrow f = 6$$

$$t_{6; 0,975} = 2,44691...$$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ in ppm: $2609,29... \leq \mu \leq 3724,98...$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des CO₂-Volumens (KA)
1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung (KB)
- b) 1 × B1: für die richtige Berechnung von arithmetischem Mittelwert und Standardabweichung (KA)
1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Vertrauensbereich mithilfe der t -Verteilung) (KB)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Vertrauensbereichs (KB)