Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 5
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Zahlenmengen

Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Antwort!

Aussage 1: $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$

Aussage 2: $-5{,}3$ liegt in $\mathbb{Q}$, aber nicht in $\mathbb{Z}$.

Aussage 3: $\frac{\pi}{4}$ ist eine rationale Zahl.

Leitfrage:

Geben Sie einen Überblick über den Zusammenhang der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ und erklären Sie die Eigenschaft derjenigen Zahlen, die zwar in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten sind!

Geben Sie zu den folgenden Aussagen jeweils eine zutreffende Gleichung (in der Variablen x) an!

a) Die Gleichung ist in $\mathbb{Z}$, aber nicht in $\mathbb{N}$ lösbar.
b) Die Gleichung ist in $\mathbb{C}$, aber nicht in $\mathbb{R}$ lösbar.

Lösung zur Aufgabe 1

Zahlenmengen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Aussagen 1 und 2 sind wahr, die Aussage 3 ist falsch.

Mögliche Begründungen:

Aussage 1: $\sqrt{9} = 3$ und 3 ist eine ganze Zahl.

Aussage 2: $-5{,}3$ kann als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden, ist somit ein Element der Menge der rationalen Zahlen, ist aber keine ganze Zahl.

Aussage 3: Da π eine irrationale Zahl ist, kann $\frac{\pi}{4}$ nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden und ist somit nicht rational.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wahrheitswert der drei Aussagen richtig angegeben und jeweils eine korrekte Begründung angeführt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es gilt folgender Zusammenhang: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Die irrationalen Zahlen (in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten) sind Dezimalzahlen, die nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen geschrieben werden können.

Mögliche Gleichungen:

a) $x + 3 = 1$

b) $x^2 = -4$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Teilmengenbeziehungen formal oder verbal korrekt angegeben werden, die Eigenschaft der irrationalen Zahlen richtig erklärt wird und zu den Aussagen aus a und b jeweils eine passende Gleichung angegeben wird.

Aufgabe 2

Parallelogramm

Von einem Parallelogramm $ABCD$ sind die Eckpunkte $A = (-1|2)$ und $B = (5|1)$ und der Schnittpunkt der Diagonalen $M = (3|3)$ gegeben.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinaten des Eckpunkts C rechnerisch!

Leitfrage:

Geben Sie die Koordinaten eines Punktes B_1 so an, dass die Punkte A und B_1 die Eckpunkte sind und M der Mittelpunkt eines Quadrats ist! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 2

Parallelogramm

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Möglicher Lösungsweg:
$C = M + \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Punkt C richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Diagonalen eines Quadrats sind gleich lang und stehen normal aufeinander, somit gilt:

$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MB_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (je nach Umlaufsinn)

$B_1 = M + \overrightarrow{MB_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

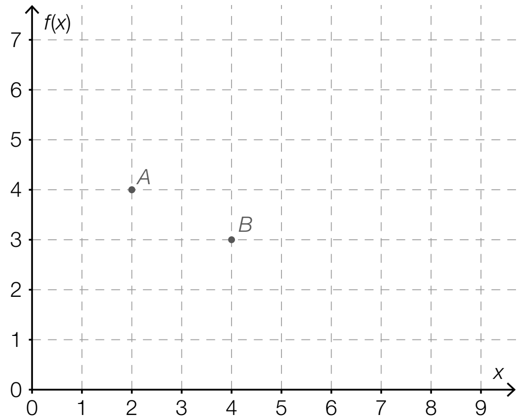
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein Eckpunkt B_1 richtig angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird. (Auf den Umlaufsinn muss dabei nicht eingegangen werden.)

Aufgabe 3

Punkte einer Exponentialfunktion

Die in der nachstehenden Abbildung dargestellten Punkte A und B haben ganzzahlige Koordinaten. Der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ verläuft durch die Punkte A und B.



Aufgabenstellung:

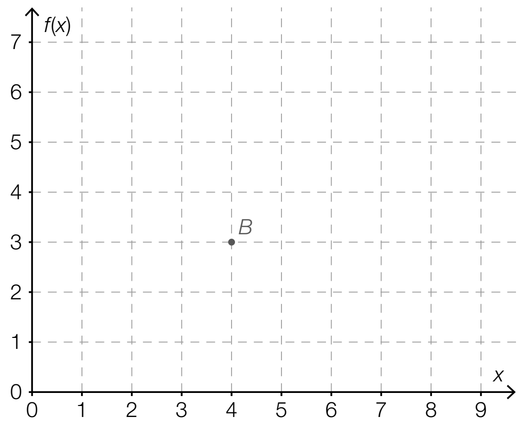
Geben Sie an, ob die nachstehenden Aussagen über diese durch A und B verlaufende Exponentialfunktion f zutreffen, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidungen!

- $f(0) \leq 5$
- $b < 1$
- Der Änderungsfaktor $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ ist konstant.

Leitfrage:

Die gegebene Funktion f beschreibt einen Zerfallsprozess mit x in Stunden.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung und die Halbwertszeit der Funktion f!

Ergänzen Sie im nachstehenden Koordinatensystem einen Punkt A_1 so, dass A_1 und B auf dem Graphen einer Exponentialfunktion liegen, deren Halbwertszeit zwei Stunden beträgt!



Lösung zur Aufgabe 3

Punkte einer Exponentialfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

- $f(0) \leq 5$
  Diese Aussage ist falsch, denn $f(0) = 5$ würde im Fall eines linearen Verlaufes des Graphen gelten. Aufgrund der Linkskrümmung dieses Funktionsgraphen kann dieser daher nicht durch den Punkt $(0|y)$ mit $y \leq 5$ verlaufen.
- $b < 1$
  Diese Aussage ist richtig, da die Funktion (streng) monoton fallend ist und damit der Wert von b zwischen 0 und 1 liegt.
- Der Änderungsfaktor $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ ist konstant.
  Diese Aussage ist richtig, da bei Exponentialfunktionen die relative Änderung in gleichen Intervallen konstant ist (und daher gilt: $f(x+1) = a \cdot b^x \cdot b = f(x) \cdot b$).

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn bei allen Aussagen angegeben wird, ob diese zutreffen oder nicht, und jeweils eine (sinngemäß) korrekte Begründung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(x) = \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$ bzw. $f(x) \approx 5{,}\dot{3} \cdot e^{-0{,}1438 \cdot x}$

Die Halbwertszeit beträgt ca. 4,82 Stunden.

Ein möglicher Punkt A_1 hat die Koordinaten $(2|6)$.

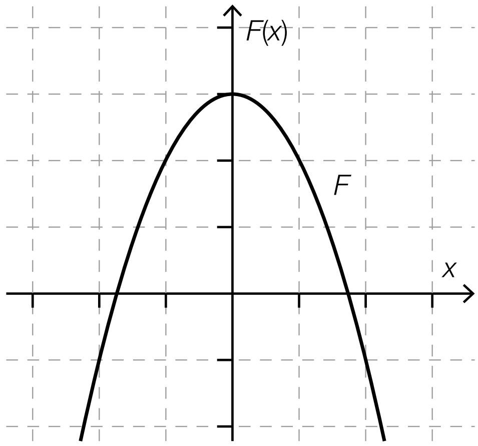
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl die Gleichung als auch die Halbwertszeit und ein möglicher Punkt A_1 korrekt angegeben werden.

Aufgabe 4

Stammfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Stammfunktion F einer Polynomfunktion f dargestellt. Die Funktion F ist symmetrisch zur senkrechten Achse.



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-c}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ an und erläutern Sie, welche Überlegungen zu diesem Wert führen!

Leitfrage:

Die Funktion F ist eine Polynomfunktion zweiten Grades mit der Funktionsgleichung $F(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Erläutern Sie, wie sich eine Veränderung des Parameters b auf den Wert des bestimmten Integrals $\int_{0}^{z} f(x)\,\mathrm{d}x$ mit $z > 0$ auswirkt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 4

Stammfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Wert des Integrals beträgt null, weil die Stammfunktion symmetrisch zur senkrechten Achse ist, daher gilt $F(c) = F(-c)$ und somit gilt $\int_{-c}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(-c) = 0$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Integrals mit null angegeben wird und (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Wert des Integrals ändert sich nicht, wenn b verändert wird, da eine additive Konstante in einer Stammfunktion keine Auswirkung auf den Wert des bestimmten Integrals hat.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Unabhängigkeit des bestimmten Integrals vom Parameter b korrekt begründet wird.

Aufgabe 5

Erwartungswert

Die nachstehende Tabelle zeigt alle möglichen Auszahlungsbeträge und die entsprechenden Gewinnwahrscheinlichkeiten bei einem Glücksspiel, wobei eine Gewinnwahrscheinlichkeit nicht angegeben ist.

Auszahlungsbetrag in €	0	5	10	100
Gewinnwahrscheinlichkeit	0,68	0,2	0,1	p

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit p für den Gewinn von € 100 an und ermitteln Sie den Erwartungswert des Auszahlungsbetrags!

Leitfrage:

Um am Glücksspiel teilnehmen zu dürfen, ist ein Einsatz von € 5 zu leisten.
Geben Sie an, ob das Glücksspiel im Mittel den Anbieter oder die Spieler „bevorzugt“, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Ändern Sie einen Auszahlungsbetrag so ab, dass (unter Beibehaltung der Gewinnwahrscheinlichkeiten und des Einsatzes) das Glücksspiel weder den Anbieter noch die Spieler „bevorzugt“, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 5

Erwartungswert

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$p = 0{,}02$

Der Erwartungswert für den Auszahlungsbetrag beträgt € 4, weil
$5 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}02 = 4$ ergibt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert für p angegeben und der Erwartungswert für den Auszahlungsbetrag richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Das Spiel bevorzugt den Anbieter, da der Einsatz höher als der Erwartungswert für den Auszahlungsbetrag ist.

Mögliche Änderung:
Wenn der höchste Auszahlungsbetrag von € 100 auf € 150 erhöht wird, beträgt der Erwartungswert für den Auszahlungsbetrag € 5 und entspricht somit der Höhe des Einsatzes.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Bevorzugung des Anbieters erkannt und korrekt begründet wird und wenn eine korrekte Änderung eines Auszahlungsbetrags angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.