Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

maj 2017

Matematika

Kompenzacijski izpit 7

Podatki za **izpraševalce / izpraševalke**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence (*Grundkompetenzen*), pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju (*Kommunikationsfähigkeit*).

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko (*Grundkompetenzpunkt*), z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko (*Leitfragenpunkt*). Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		najmanjše število doseženih točk
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Kvadratna enačba

Za $x \in \mathbb{R}$ je dana enačba $x^2 + a \cdot x = 15$ pri $a \in \mathbb{R}$.

Zastavitev naloge:

Določite a tako, da bo $x_1 = -5$ ena od obeh rešitev enačbe.

Nadalje izračunajte drugo rešitev x_2 te enačbe in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Vsakič od primerov navedite vse vrednosti za a, pri katerih ima enačba natanko eno rešitev, nobene rešitve oz. dve rešitvi, ter vsakič pojasnite izbiro vrednosti za a.

Rešitev naloge 1

Kvadratna enačba

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$(-5)^2 + a \cdot (-5) = 15 \;\Rightarrow\; a = 2$

$x^2 + 2 \cdot x = 15 \;\Rightarrow\; x_2 = 3$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta a in x_2 pravilno določena.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Da ima dana enačba natanko eno rešitev, mora biti diskriminanta enaka nič:

$\frac{a^2}{4} + 15 = 0$

$a^2 = -60$

Enačba $a^2 = -60$ v realnih številih nima rešitve, zato ne obstoja nobena vrednost za a, tako da bi imela dana enačba natanko eno rešitev.

Da dana enačba nima rešitve, mora veljati:

$a^2 < -60$

Ni takega realnega števila, ki bi ustrezalo tej neenačbi. Zaradi tega ni nobenih vrednosti za a takšnih, da dana enačba ne bi imela rešitve.

Da ima dana enačba dve rešitvi, mora veljati:

$a^2 > -60$

Ta neenačba je izpolnjena za vse realne vrednosti. Zato ima dana enačba pri vsaki vrednosti a natanko dve rešitvi.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če so za vse tri primere pravilno navedene in (smiselno) pravilno pojasnjene vrednosti za a.

Naloga 2

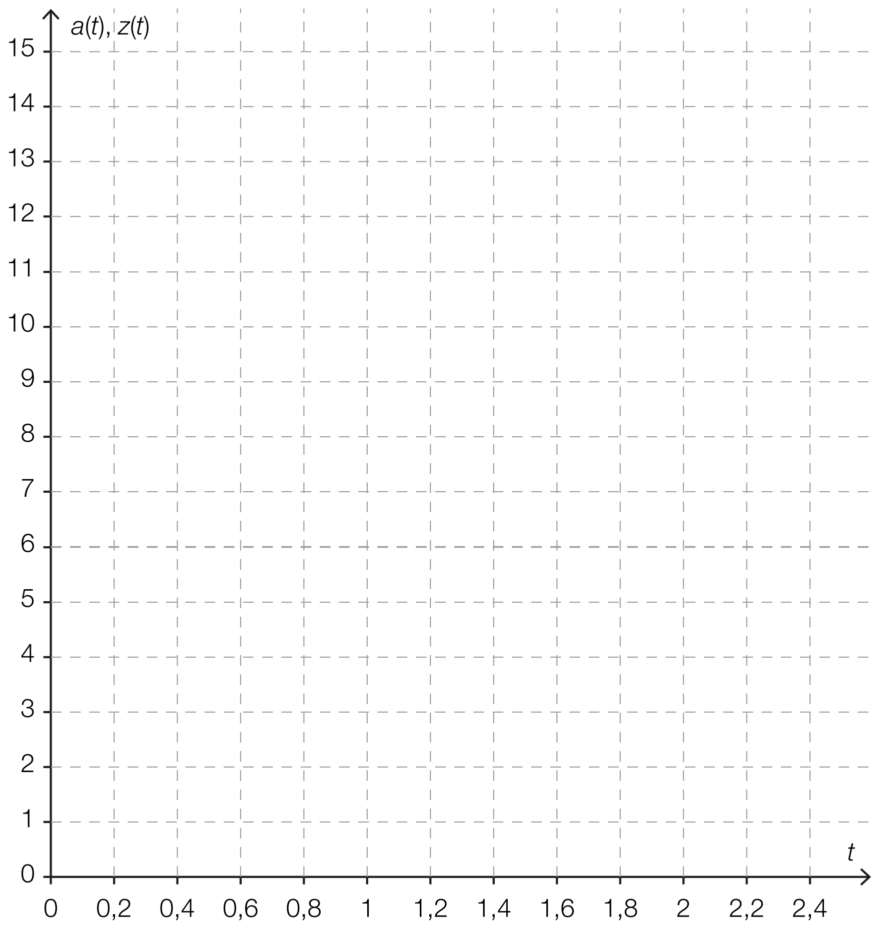
Vmesni rezervoar

V časovnem trenutku $t = 0$ se v nekam vmesnem zbiralniku nahaja 1000 m^3 vode. Vmesni zbiralnik ima dovod in odtok.

Hitrost dotoka z je opisana z enačbo $z(t) = 3 \cdot t + 4$.
Hitrost odtoka a je opisana z enačbo $a(t) = 2 \cdot t + 5$. Pri tem se $z(t)$ in $a(t)$ merita v m^3/h in t v urah.

Zastavitev naloge:

V naslednjem koordinatnem sistemu predstavite grafa funkcij z in a.



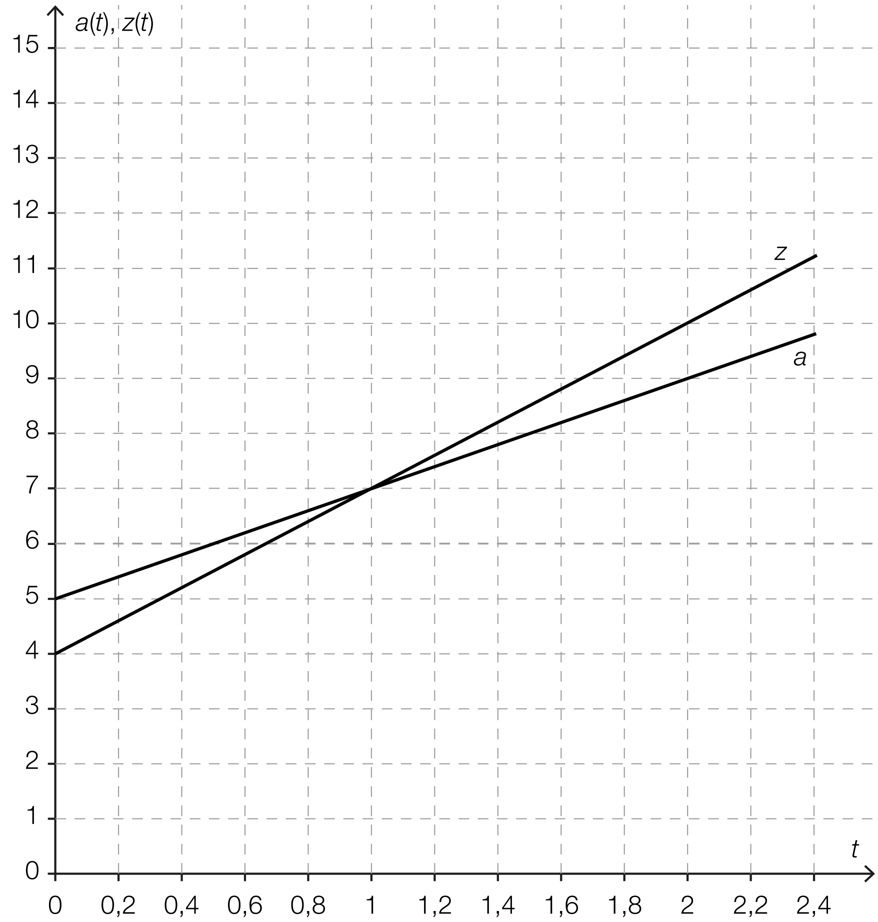
Nadaljevalno vprašanje:

Nastavite enačbo tiste funkcije V, ki v vsakem časovnem trenutku podaja količino vode v vmesnem zbiralniku.

Rešitev naloge 2

Vmesni rezervoar

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:



Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta pravilno narisana oba grafa (ki se sekata v točki (1|7)).

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Razlika med hitrostjo dotoka in hitrostjo odtoka je:
$z(t) - a(t) = t - 1$.

$\Rightarrow \; V(t) = 1\,000 + \frac{t^2}{2} - t$

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je pravilno določena enačba funkcije V in pojasnjen pravilen postopek.

Naloga 3

Mera spremembe

Če neko telo vržemo navpično navzgor, je moč višino telesa nad tlemi približno opisati s funkcijo h z enačbo $h(t) = -5 \cdot t^2 + 30 \cdot t + 2$. Pri tem je $h(t)$ višina telesa nad tlemi v metrih (m) in t čas v sekundah (s), ki je potekel po metu.

Zastavitev naloge:

Ugotovite absolutno in relativno (odstotno) spremembo funkcije h v časovnem intervalu [0 s; 2 s] in pojasnite rezultata v danem kontekstu.

Nadaljevalno vprašanje:

Ugotovite povprečno mero spremembe (*mittlere Aenderungsrate*) funkcije h na enoto spremembe neodvisne spremenljivke v časovnem intervalu [0 s; 2 s] in pojasnite rezultat glede na gibanje telesa.

Določite tisti časovni trenutek t_0, pri katerem je trenutna mera spremembe (*momentane Aenderungsrate*) funkcije h enaka povprečni meri spremembe funkcije na enoto spremembe neodvisne spremenljivke v časovnem intervalu [0 s; 2 s] in pojasnite rezultat glede na gibanje telesa.

Rešitev naloge 3

Mera spremembe

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$h(2) - h(0) = 42 - 2 = 40$
V prvih dveh sekundah višina naraste za 40 m.

$\frac{h(2) - h(0)}{h(0)} = 20$

Možna tolmačenja:

Višina je v prvih dveh sekundah narastla za 2 000 %.

ali:

V obeh prvih sekundah je višina narastla za 20 kratnik.

ali:

Po dveh sekundah je višina 21 krat tolikšna kot na začetku.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta obe meri spremembe pravilno navedeni in (smiselno) pravilno pojasnjeni.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = 20$ m/s
Povprečna hitrost telesa v prvih dveh sekundah znaša 20 m/s.

$h'(t) = -10 \cdot t + 30$
$h'(t_0) = 20 \;\Rightarrow\; -10 \cdot t_0 + 30 = 20 \;\Rightarrow\; t_0 = 1$
Trenutna hitrost telesa v časovnem trenutku $t_0 = 1$ je enaka povprečni hitrosti telesa v časovnem intervalu [0 s; 2 s].

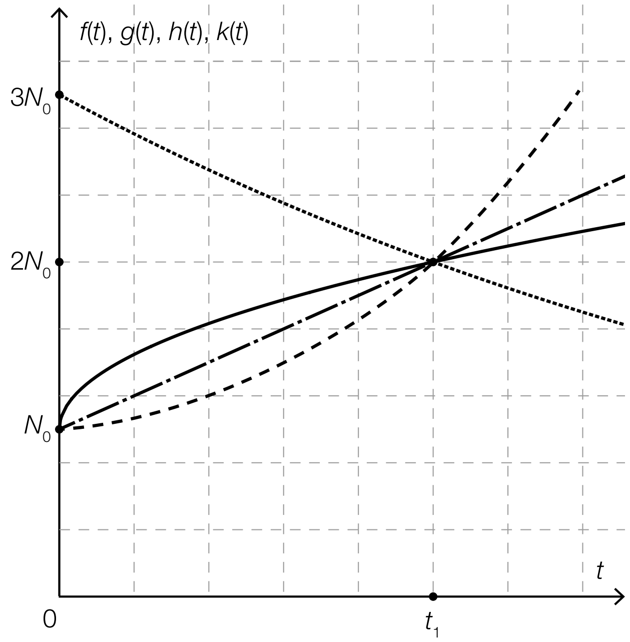
Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je povprečna hitrost pravilno določena in pojasnjena. Nadalje mora biti pravilno določen časovni trenutek t_0 in navedeno (smiselno) pravilno tolmačenje.

Naloga 4

Grafi funkcij

V nadaljevanju so predstavljeni grafi štirih funkcij f, g, h in k.



Zastavitev naloge:

Za te štiri funkcije f, g, h in k veljajo za vse $t \in (0; t_1)$ naslednje izjave

- $f''(t) = 0$ in $f'(t) > 0$
- $g''(t) > 0$ in $g'(t) > 0$
- $h''(t) < 0$ in $h'(t) > 0$
- $k''(t) > 0$ in $k'(t) < 0$

Grafe na gornji sliki pravilno označite z f, g, h in k in utemeljite svoje odločitve.

Nadaljevalno vprašanje:

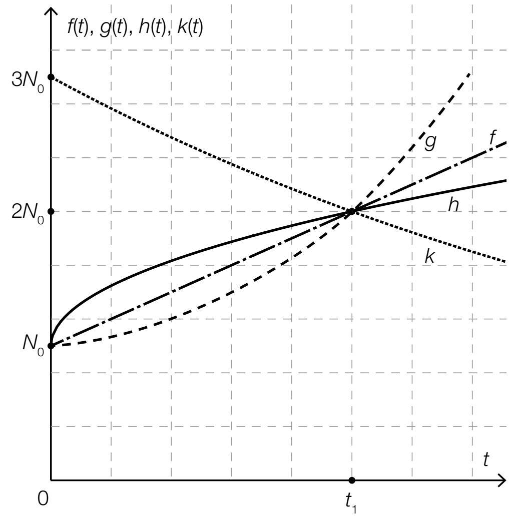
Ob uporabi N_0 in t_1 sestavite funkcijsko enačbo funkcije f v odvisnosti od t in pojasnite svoj postopek.

Navedite, če je za funkcijo f izjava: »Podvojitveni čas je konstanten.« pravilna ali napačna, in utemeljite svojo odločitev.

Rešitev naloge 4

Grafi funkcij

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:



$f''(t) = 0 \;\Rightarrow\;$ Graf funkcije f ima ukrivljenost nič (je premica).

$g''(t) > 0$ in $g'(t) > 0 \;\Rightarrow\;$ Graf funkcije g je levo ukrivljen (pozitivno ukrivljen) in strogo monotono naraščajoč.

$h''(t) < 0 \;\Rightarrow\;$ Graf funkcije h je desno ukrivljenima (negativno ukrivljen).

$k''(t) > 0$ in $k'(t) < 0 \;\Rightarrow\;$ Graf funkcije k je levo ukrivljen (pozitivno ukrivljen) in strogo monotono padajoč.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko so grafi pravilno označeni in je vsakič navedena (smiselno) pravilna utemeljitev.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Funkcija f je linearna funkcija, katere graf poteka skozi točki $(0|N_0)$ in $(t_1|2N_0)$.

Zato velja: $f(t) = \dfrac{N_0}{t_1} \cdot t + N_0$

Izjava »Podvojitveni čas je konstanten.« je napačna.

Možna utemeljitev:

V časovnem intervalu $[0; t_1]$ se sicer podvoji funkcijska vrednost iz N_0 na $2N_0$ v nasprotju s tem pa v časovnem intervalu $[t_1; 2t_1]$ funkcijska vrednost naraste od $2N_0$ na $3N_0$. Se torej ne podvoji.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je funkcijska enačba funkcije f pravilno navedena in pojasnjen pravilen postopek. Nadalje mora biti izjava razpoznana za napačno in le-to (smiselno) pravilno utemeljeno.

Naloga 5

Krogle

V neki žari se nahaja deset črnih in pet belih krogel.

Zastavitev naloge:

David najprej iz žare izvleče eno črno kroglo. Nato po naključnem principu izvleče še eno nadaljnjo kroglo, ne da bi dal prvo kroglo nazaj.
Določite verjetnost P_1, da je tudi druga izvlečena krogla črna in pojasnite svoj postopek.

Leo izvleče (zopet izmed vseh 15 krogel) po naključnem principu iz žare zaporedoma dve krogli, brez vračanja krogel.
Določite verjetnost P_2, da je druga izvlečena krogla črna in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Za nek naključni poskus uporabimo poleg žare, ki je omenjena v uvodu, še neko drugo žaro, v kateri je deset belih in pet črnih krogel.

David mora po naključnem principu izbrati eno od obeh žar in nato po naključnem principu iz izbrane žare izvleči dve krogli.
Določite verjetnost P_3, da sta obe izvlečeni krogli črni.

Leo izvede enak naključni poskus, vendar sme krogle v žare razporediti drugače, da bi povečal verjetnost, da izvleče (zaporedoma, brez vračanja) dve črni krogli.
V ta namen postavi vse črne krogle v prvo žaro in vse bele v drugo žaro.

Računsko preverite, če ima Leo s tem za izvlečenje dveh črnih krogel boljše možnosti kot David.

Rešitev naloge 5

Krogle

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$P_1 = \frac{9}{14} \approx 0{,}643 = 64{,}3\ \%$

Možno pojasnilo:

Če vemo, da je prva izvlečena kroga črna, se v žari nahaja med 14 preostalimi kroglami samo še 9 črnih krogel.

Za Lea so ugodni izidi poskusa: črno-črno oz. belo-črno.

Možen izračun:

$P_2 = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667 = 66{,}7\ \%$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta obe verjetnosti pravilno določeni in vsakič pojasnjen (smiselno) pravilen postopek.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$P_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{11}{42} \approx 0{,}2619 = 26{,}19\ \%$

Verjetnost, da Leo pri svojem slučajnem poskusu izvleče dve črni krogli:

$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\ \%$

Leove možnosti, da izvleče dve črni krogli, so bistveno višje.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno določena verjetnost P_3 in je računsko dokazano, da ima Leo boljše možnosti, da izvleče dve črni krogli.