Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

maj 2017

Matematika

Kompenzacijski izpit 6

Podatki za **izpraševalce / izpraševalke**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence (*Grundkompetenzen*), pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju (*Kommunikationsfähigkeit*).

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko (*Grundkompetenzpunkt*), z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko (*Leitfragenpunkt*). Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		najmanjše število doseženih točk
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Ekvivalenčna preoblikovanja

Za $x \in \mathbb{R}$ sta dani dve enačbi:

- $3 - \frac{2x}{5} = -1$
- $\frac{3x}{5} + 1 = x - 3$

Zastavitev naloge:

Navedite, ali sta ti dve enačbi ekvivalentni.

Za primer, da sta ti dve enačbi ekvivalentni, navedite možna ekvivalenčna preoblikovanja za prevod prve enačbe v drugo enačbo.
Če enačbi nista ekvivalentni, utemeljite zakaj je temu tako.

Nadaljevalno vprašanje:

Sklicujoč se na spodaj navedeni primer, konkretno pojasnite, zakaj pri prikazanem preoblikovanju ne gre za ekvivalenčno preoblikovanje. Osnovna množica je množica realnih števil.

$(x-2)^2 = 25 \quad | \ \sqrt{\ }$
$x - 2 = 5$

Rešitev naloge 1

Ekvivalenčna preoblikovanja

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Ti dve enačbi sta ekvivalentni.

Možna ekvivalenčna preoblikovanja:
Potem ko odštejemo število 2, dobimo enačbo $1 - \frac{2x}{5} = -3$.
Ko nato prištejemo x, dobimo $1 + \frac{3x}{5} = -3 + x$, in s tem dobimo drugo enačbo.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta enačbi razpoznani kot ekvivalentni in so pravilno navedena možna ekvivalenčna preoblikovanja.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Prva enačba ima rešitvi –3 in 7, druga pa samo eno rešitev, namreč 7. Enačbi potemtakem nimata enake množice rešitev, in torej nista ekvivalentni.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je (smiselno) pravilno pojasnjeno zakaj enačbi nista ekvivalentni.

Naloga 2

Ohlajanje

Posoda z vročo vodo je v časovnem trenutku $t_0 = 0$ postavljena na prosto pri zunanji temperaturi 0 °C. Temperatura $T(t)$ (v °C) vode je odvisna od časa t (v minutah) in jo je moč opisati s funkcijo T pri $T(t) = 90 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$.

Zastavitev naloge:

Določite razpolovni čas za ta proces ohlajanja in pojasnite to vrednost v danem kontekstu.

Nadaljevalno vprašanje:

Pokažite, da je trenutna vrednost spreminjanja temperature vode $T'(t)$ premo sorazmerna trenutni temperaturi vode v časovnem trenutku t in navedite sorazmernostni faktor k.

k = ____

Navedite kakšen pomen ima za proces ohlajanja absolutna vrednost od T'.

Rešitev naloge 2

Ohlajanje

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$45 = 90 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} \;\Rightarrow\; t \approx 3{,}5$

Po ca. 3,5 minutah je temperatura vode padla na polovico izhodiščne vrednosti (od 90 °C na 45 °C).

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je razpolovni čas pravilno določen in navedeno (smiselno) pravilno pojasnilo.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$T'(t) = 90 \cdot (-0{,}2) \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} = -0{,}2 \cdot T(t)$
$k = -0{,}2$

Absolutna vrednost od T' podaja hitrost ohlajanja.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je pokazana prema sorazmernost in pravilno določen sorazmernostni faktor (tudi $k = -5$ je vrednotiti kot pravilno, ker velja: $T(t) = -5 \cdot T'(t)$). Nadalje mora biti (smiselno) pravilno naveden pomen za T'.

Naloga 3

Cena surove nafte

Decembra 2015 je cena surove nafte dnevno tendenčno padala. Cena surove nafte se navaja v US-dolarjih, nanašajoč se na *sodček* (angl. *barrel*), pri čemer vsebuje en sodček 159 litrov.

1. decembra 2015 ob 12:00 uri je znašala cena surove nafte 41,70 US-dolarjev na sodček,
11. decembra 2015 ob 12:00 uri je cena znašala 37,94 na sodček.

Zastavitev naloge:

Navedite absolutno in relativno (odstotno) spremembo cene surove nafte na sodček za navedeno časovno obdobje.

Nadaljevalno vprašanje:

Izračunajte srednjo hitrost spreminjanja cene surove nafte na liter v navedenem časovnem obdobju (v dnevih) in svoj rezultat interpretirajte v dani povezavi.

Navedite, kakšno ceno bi imel 1 liter surove nafte 16. decembra 2015, če bi se cena od 11. decembra 2015 dalje razvijala z enako srednjo hitrostjo spreminjanja na dan.

Rešitev naloge 3

Cena surove nafte

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

absolutna sprememba: –3,76 US-dolarjev na sodček
relativna sprememba: –9 % oz. –0,09

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta obe vrednosti pravilno navedeni. Tudi navedba pozitivnih vrednosti (3,76 US-dolarjev in 9 %) je veljavna, če je verbalno enoznačno pokazano, da gre za zmanjšanje.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možna rešitev:

povprečna hitrost spreminjanja: $\dfrac{\frac{37{,}94}{159}-\frac{41{,}7}{159}}{10} \approx -0{,}00236$

Cena surove nafte na liter je v tem časovnem obdobju padla za povprečno 0,00236 US-dolarjev na dan.
Cena na liter 16. 12. 2015 pri opisanem razvoju: $\frac{37{,}94}{159} - 5 \cdot 0{,}00236 \approx 0{,}2268$
Cena na liter bi znašala ca. 0,2268 US-dolarjev.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je pravilno navedena in (smiselno) pravilno interpretirana povprečna hitrost naraščanja cene surove nafte na liter, ter pravilno navedena cena surove nafte na liter za 16. 12. 2015.
Tolerančni interval za povprečno hitrost spreminjanja: [–0,0024; –0,002]
Tolerančni interval za ceno na liter: [0,22; 0,23]

Naloga 4

Integral

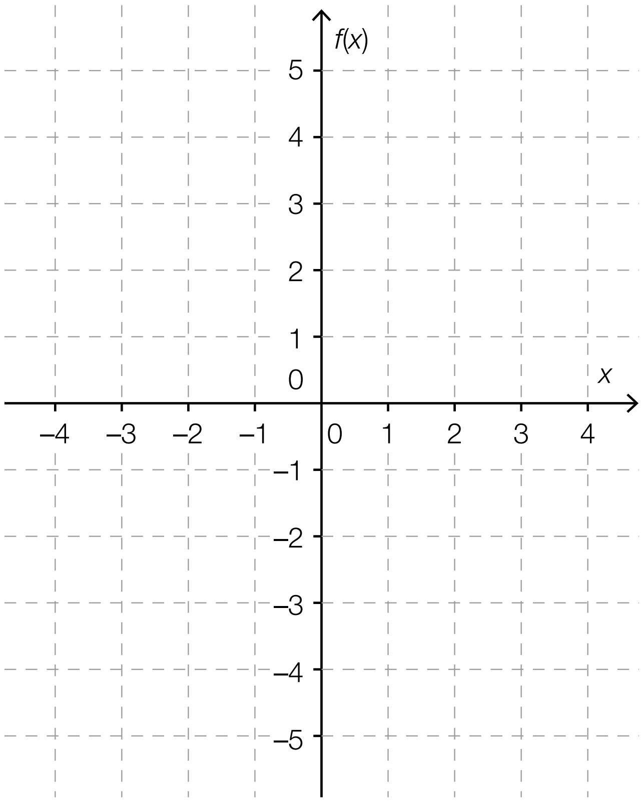
Dana je linearna funkcija f pri $f(x) = -2 \cdot x + 2$.

Zastavitev naloge:

Navedite enačbo tiste primitivne funkcije (*prvotne funkcije*) F funkcije f, za katero velja $F(2) = 1$ in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Določite vrednost določenega integrala $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ in pojasnite svoj postopek.
V naslednjem koordinatnem sistemu predstavite graf funkcije f in pojasnite, zakaj se v tem primeru vrednost določenega integrala ne ujema s ploščino tiste ploskve, ki jo na intervalu [0; 3] graf funkcije oklepa z x osjo.



Rešitev naloge 4

Integral

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možna pot reševanja:
Za vse primitivne funkcije velja: $F(x) = -x^2 + 2 \cdot x + c$.
Zaradi $F(2) = 1$ velja: $-2^2 + 2 \cdot 2 + c = 1 \Rightarrow c = 1$.
S tem: $F(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 1$.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je navedena pravilna enačba za F in pojasnjen pravilen postopek.

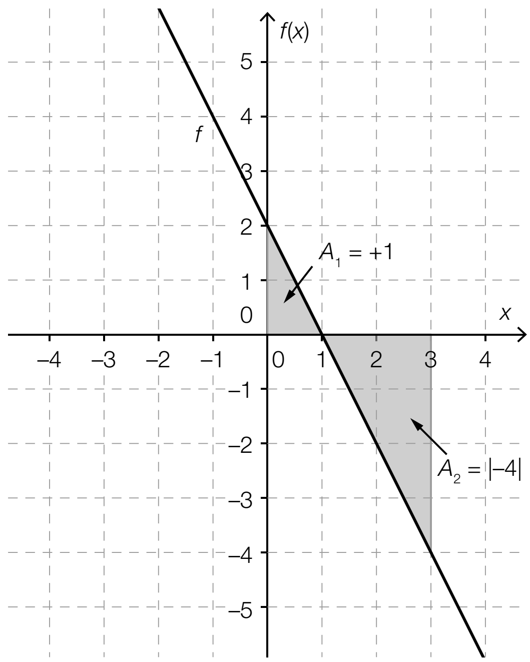
Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Velja:
$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (-2 \cdot x + 2)\,\mathrm{d}x = (-x^2 + 2 \cdot x)\Big|_0^3 = -3$ oz. $F(3) - F(0) = -2 - 1 = -3$

Možna razlaga:
Pri računanju ploščin je treba upoštevati, da je integral funkcije pri tistih delih ploskve, ki ležijo pod x-osjo, negativen. Zato mora izračun ploščine potekati odsekoma, ob upoštevanju lege delnih ploskev.

$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + (-4) = -3$

Ploščina:
$A_1 + A_2 = 1 + |-4| = 5$



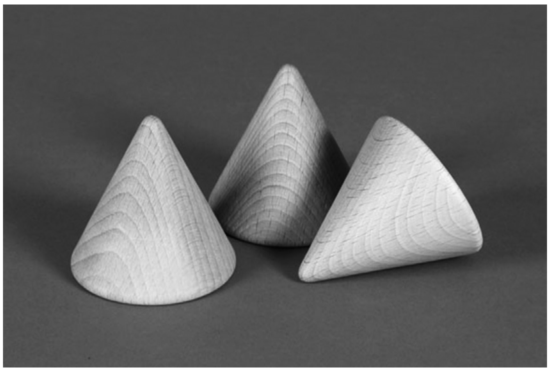
Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno določena vrednost integrala, naveden pravilen postopek, pravilo predstavljen graf in navedeno (smiselno) pravilno pojasnilo.

Naloga 5

Stožec

Stožec, ki ga vržemo, lahko pade tako, da leži na plašču ali na osnovni ploskvi.



Vir slike: http://www.holzbausteine.at/images/Spitzkegel60.jpg [28.04.2016].

Zastavitev naloge:

Met takega stožca opazujmo kot slučajni poskus. Stožec najprej vržemo 50 krat. Pri tem v 12 primerih pade tako, da leži na osnovni ploskvi.

Felix navede naslednji račun:

$$\left(\frac{12}{50}\right)^2 = \frac{144}{2\,500} = 0{,}0576 = 5{,}76\ \%$$

Interpretirajte rezultat v dani povezavi.

Nadaljevalno vprašanje:

Selin zatrjuje, da verjetnost, s katero stožec pade tako, da leži na osnovni ploskvi, pravzaprav sploh ni znana.

Navedite, kateri argument lahko uporabi za utemeljitev svoje trditve in kako moramo slučajni poskus spremeniti, da bi lahko čim bolj natančno določili to verjetnost.

Rešitev naloge 5

Stožec

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Verjetnost, da pri dvakratnem metu stožca le-ta pri obeh metih pade tako, da leži na osnovni ploskvi, znaša 5,76 % (pri predpostavki, da znaša verjetnost, da stožec pade tako, da leži na osnovni ploskvi, $\frac{12}{50}$).

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je v dani povezavi navedena (smiselno) pravilna interpretacija.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Relativna frekvenca daje samo oceno za verjetnost.
Če slučajni poskus izvedemo samo 50 krat, je z navedbo relativne frekvence verjetnost le zelo nenatančno aproksimirana.
Da bi dobili natančnejšo oceno verjetnosti, moramo slučajni poskus izvesti v veliko večjem številu ponovitev.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je naveden odgovor, ki (smiselno) ustreza pričakovani rešitvi.