Ime:	
Razred:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni izpit

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

28. september 2017

Matematika

2. del – naloge

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Navodila za reševanje nalog

Spoštovana kandidatka! Spoštovani kandidat!

Delovni zvezek z nalogami 2. dela, ki je pred Vami, vsebuje štiri naloge z vsakič po dvema do štirimi delnimi nalogami, pri čemer so vse delne naloge rešljive neodvisno druga od druge.
Na voljo imate *150 minut* čistega časa za reševanje.

Uporabljajte pisalo v modri ali črni barvi, ki ga ni moč odstraniti z radirko. Pri konstrukcijskih nalogah lahko uporabite tudi svinčnik.

Za reševanje uporabljajte ta delovni zvezek in liste, ki so vam dani na razpolago! Svoje ime in priimek vpišite na prvi strani delovnega zvezka v za to predvideno polje in na vsak posamezni list, ki ga boste uporabili! Pri reševanju vsake posamezne delne naloge navedite njeno oznako!

Pri vrednotenju bo upoštevano vse, kar ni prečrtano. Rešitev naloge mora biti pri tem jasno razvidna. Če rešitev ni jasno razvidna, ali če so navedene različne rešitve, velja naloga za nerešeno. Svoje zapiske prečrtajte.

Pri reševanju smete uporabljati dovoljeno zbirko formul in običajne elektronske pripomočke.

Oddati je potrebno delovni zvezek in vse liste, ki jih boste uporabljali.

Vrednotenje

Vsaka naloga iz 1. dela bo ovrednotena z 0 točk ali z 1 točko, vsaka delna naloga iz 2. dela pa z 0, 1 ali 2 točkama. Z $\boxed{\text{A}}$ označene zastavitve nalog bodo ovrednotene z 0 točk ali z 1 točko.

– Če bo v 1. delu pravilno rešenih vsaj 16 od 24 nalog, bo delo ocenjeno pozitivno.
– Če bo v 1. delu pravilno rešenih manj kot 16 od 24 nalog, bodo za izravnavo bistvenega območja znanja, v skladu z odredbo o ocenjevanju znanj, upoštevane z $\boxed{\text{A}}$ označene naloge iz 2. dela.
  Če bo ob upoštevanju z $\boxed{\text{A}}$ označenih nalog iz 2. dela vsaj 16 nalog pravilno rešenih, bo delo ocenjeno pozitivno.
  Če pa bo tudi z upoštevanjem z $\boxed{\text{A}}$ označenih nalog iz 2. dela pravilno rešenih manj kot 16 nalog, bo delo ocenjeno z »nezadostno«.
– Če bo v 1. delu (ob upoštevanju izravnalnih točk $\boxed{\text{A}}$) doseženih vsaj 16 točk, se bo delo ocenjevalo po naslednjem ključu:

Genügend	zadostno	16 – 23 točk
Befriedigend	povoljno	24 – 32 točk
Gut	dobro	33 – 40 točk
Sehr gut	prav dobro	41 – 48 točk

Pojasnilo k formatom ogovorov

Nekatere naloge imajo ***proste formate odgovorov***; pri tem Vaš odgovor vpišete v delovni zvezek neposredno pod vsakokratno zastavitev naloge. Nadaljnji formati odgovorov, ki lahko pridejo v poštev pri pisnem izpitu (klavzuri), so predstavljeni kot sledi:

Prirejevalni format: za ta format je značilno več izjav (oz. tabel ali slik), nasproti katerim stoji več možnosti odgovorov. Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da vsaki izjavi priredite ustrezno možnost odgovora z vnosom odgovoru pripadajoče črke!

Primer:
Dani sta dve enačbi.

Zastavitev naloge:
Danima enačbama priredite vsakič ustrezno oznako (izmed možnosti A do D)!

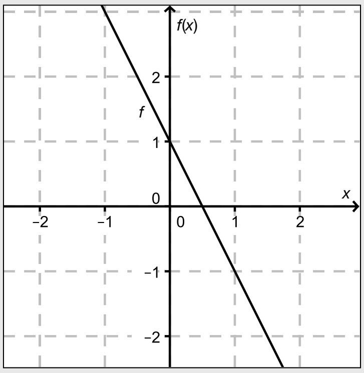
1 + 1 = 2	A
2 · 2 = 4	C

A	seštevanje
B	deljenje
C	množenje
D	odštevanje

Konstrukcijski format: Podana je naloga in zastavitev vprašanja. Naloga zahteva dopolnitev s točkami, premicami in / ali krivuljami v delovni zvezek.

Primer:
Dana je linearna funkcija f z $f(x) = k \cdot x + d$.

Zastavitev naloge:
V dani koordinatni sistem narišite graf linearne funkcije pri pogojih: $k = -2$ in $d > 0$!



Format multiple-choice v različici »1 izmed 6«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in šest možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno možnost odgovora**. Naloge tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite edino pravilno možnost odgovora!

Primer:
Katera enačba je pravilna?

Zastavitev naloge:
S križcem označite ustrezno enačbo !

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 2	☐
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐
6 + 6 = 6	☐

Format multiple-choice v različici »2 izmed 5«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in pet možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **dve možnosti odgovora**. Naloge tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite obe pravilni možnosti odgovora!

Primer:
Kateri enačbi sta pravilni?

Zastavitev naloge:
S križcem označite obe ustrezni enačbi!

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐

Format multiple-choice v različici »x izmed 5«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in pet možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno, dve, tri, štiri *ali* pet možnosti odgovora.** V zastavitvi naloge vedno najdete zahtevo »S križcem označite veljavno(-e) izjavo(-e)/enačbo(-e)/…!« Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da s križcem označite pravilno možnost/pravilne možnosti odgovora!

Primer:
Katera(-e) izmed navedenih enačb je/so pravilna(-e)?

Zastavitev naloge:
S križcem označite ustrezno(-e) enačbo(-e)!

1 + 1 = 2	☒
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 6	☒
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 10	☒

Luknjičasto besedilo: Za ta format odgovora je značilen stavek z dvema vrzelima (luknjama), kar pomeni, da sta v besedilu naloge izpostavljeni dve mesti, ki ju je potrebno dopolniti. Za vsako vrzel (luknjo) so podane tri možnosti vnosa. Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da za vsako od vrzel (lukenj) s križcem označite obe pravilni možnosti vnosa!

Primer:
Dane so 3 enačbe.

Zastavitev naloge:
V naslednjem stavku dopolnite vrzeli (luknje) v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezne dele stavka tako, da nastane pravilna izjava!

Operacija, predstavljena z enačbo ________①________, se imenuje izračunanje vsote ali ________②________ .

①	
1 – 1 = 0	☐
1 + 1 = 2	☒
1 · 1 = 1	☐

②	
množenje (multiplikacija)	☐
odštevanje (subtrakcija)	☐
seštevanje (adicija)	☒

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, pri katerih je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v želeni okvirček.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor »5 + 5 = 9«, nato pa spremenjen na »2 + 2 = 4«.

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite želeni prebarvani okvirček.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Tukaj je bil odgovor »2 + 2 = 4« najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

Če imate še kakšno vprašanje, se prosimo obrnite na svojo učiteljico/svojega učitelja!

Veliko uspeha pri reševanju!

Naloga 1

Aktivnost in določanje starosti

Pri razpadu neke radioaktivne snovi število še ne razpadlih atomskih jeder eksponentno upada in ga je moč približno opisati s funkcijo N pri $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. Pri tem je N_0 število atomskih jeder v časovnem trenutku $t = 0$, $N(t)$ število še ne razpadlih atomskih jeder v časovnem trenutku $t \geq 0$ in λ tako imenovana razpadna konstanta.

Aktivnost $A(t)$ je absolutna vrednost trenutne vrednosti spremembe funkcije N v časovnem trenutku t. Meri se v becquerelih (Bq). Aktivnost 1 Bq ustreza enemu radioaktivnemu razpadu na sekundo.

Pri radioaktivnih snoveh aktivnost tudi eksponentno upada in jo je moč modelirati s funkcijo A pri $A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. Pri tem je A_0 aktivnost v trenutku $t = 0$ in $A(t)$ aktivnost v časovnem trenutku $t \geq 0$.

Zastavitev naloge:

a) Navedite formulo, s pomočjo katere je moč, iz izmerjene aktivnosti A_0 izračunati število atomskih jeder N_0.

   Neki vzorec ^{238}U (uran-238) ima v časovnem trenutku $t = 0$ aktivnost 17 Bq. Razpadna konstanta za ^{238}U ima vrednost $\lambda \approx 4{,}92 \cdot 10^{-18}$ na sekundo.
   Določite število ^{238}U-atomskih jeder v časovnem trenutku $t = 0$.

b) S pomočjo deleža ogljikovega izotopa ^{14}C v nekem vzorcu, je moč določiti starost vzorca. Zaradi presnove se je med tvorbo in radioaktivnim razpadom izotopa, tako v atomski sferi kakor tudi v živih organizmih, za ^{14}C vzpostavila ravnotežna koncentracija oz. aktivnost ca. 0,267 Bq na gram ogljika. Z odmrtjem organizma (npr. drevesa) se konča sprejemanje ^{14}C. Od tega trenutka dalje delež ^{14}C eksponentno upada (z razpadno konstanto $\lambda \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ letno) in s tem eksponentno upada tudi aktivnost.

   Neka najdba iz lesa ima delež ogljika 25 gramov in aktivnost ca. 4 Bq. Navedite, pred koliko leti je ta les odmrl.

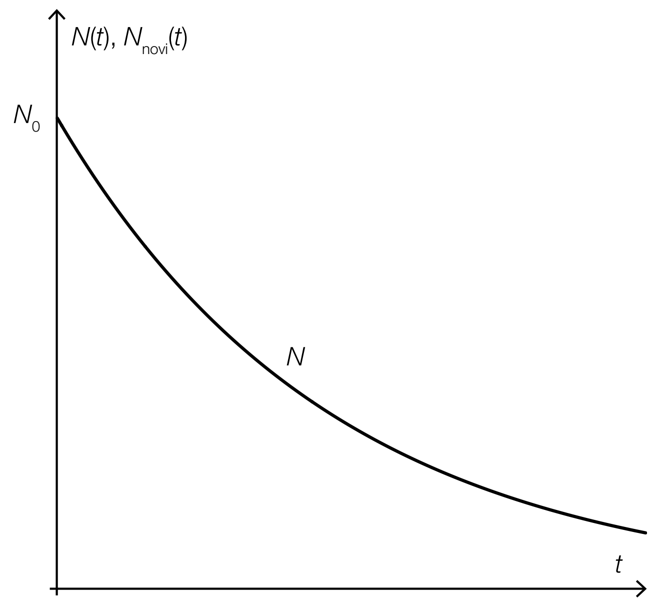
   Navedite, če je do trenutka, ko je bila najdba odkrita, razpadla že več ali manj kot polovica prvotno prisotnih ^{14}C-atomskih jeder, in utemeljite svojo odločitev.

c) Funkcija N je lahko podana tudi v obliki $N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c}}$ pri $c \in \mathbb{R}^+$.

$\boxed{\text{A}}$ Navedite katera povezava obstaja med konstanto c in razpolovnim časom τ neke radioaktivne snovi.

Na spodnji sliki je predstavljen graf neke funkcije N z $N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c}}$ pri $c \in \mathbb{R}^+$.

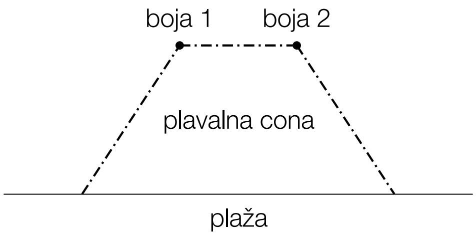
V to sliko narišite potek grafa funkcije N_{novi} z $N_{novi}(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c_{novi}}}$ pri $c_{novi} \in \mathbb{R}^+$, če mora veljati $c_{novi} < c$.



Naloga 2

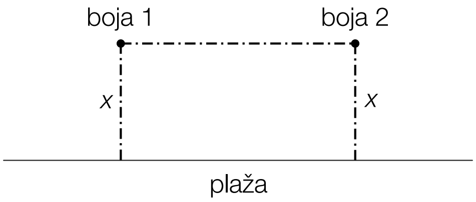
Plavalne cone

Zaradi velikega števila motornih čolnov, reaktivnih čolnov *(Jet Ski)*, itd. so na nekaterih plažah urejene posebne plavalne cone.
V vseh, v teh nalogah opisanih plavalnih conah, sta vsakič nameščeni po dve boji in 180 metrov dolga vrv, ob skoraj ravni plaži.



Zastavitev naloge:

a) Dana je pravokotna plavalna cona (x v metrih).



$\boxed{A}$ Pokažite, da velja za ploščino $A(x)$ ene take plavalne cone enačba $A(x) = 180 \cdot x - 2 \cdot x^2$.

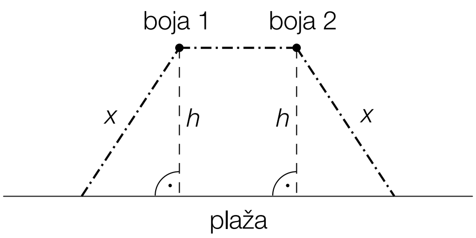
Določite dolžino, širino in ploščino tiste plavalne cone, ki ima največjo ploščino.

dolžina = ______________________________ m

širina = ______________________________ m

ploščina = ______________________________ m^2

b) Dane so plavalne cone trapezne oblike (x in h v metrih).

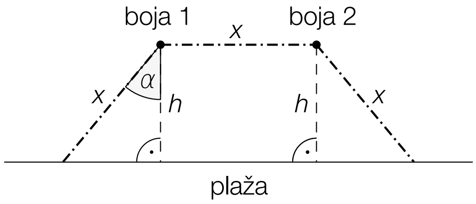


Da bi lahko izračunali ploščino neke take plavalne cone trapezne oblike, lahko uporabimo formulo $A(x, h) = h \cdot \left(180 - 2 \cdot x + \sqrt{x^2 - h^2}\right)$.

Navedite vse vrednosti, ki jih sme zavzeti x, če meri h 40 m.

Navedite vse vrednosti, ki jih sme zavzeti h, če je x dolga 50 m.

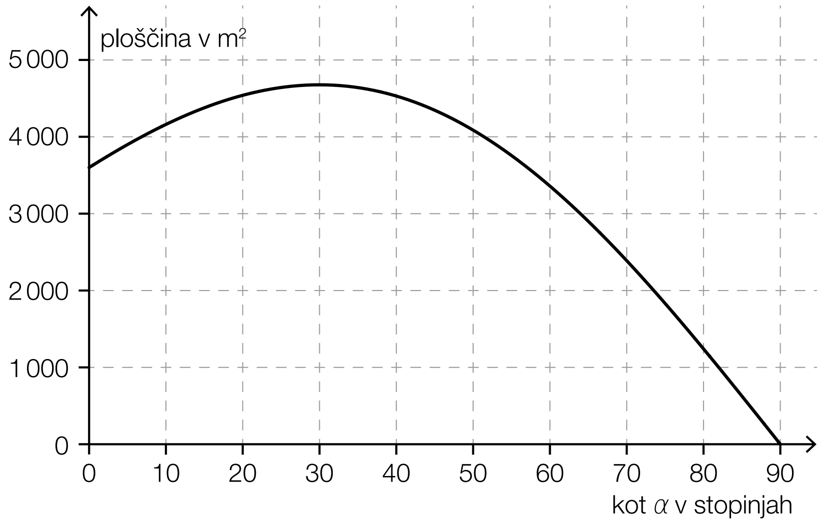
c) Dane so plavalne cone trapezne oblike, pri katerih so vsi trije odseki vrvi enako dolgi (x in h v metrih).



Ploščina $A(\alpha)$ neke take plavalne cone je lahko opisana v odvisnosti od kota α, ($A(\alpha)$ v m², α v stopinjah).
Nastavite formulo, s pomočjo katere bo moč izračunati ploščino take plavalne cone v odvisnosti od kota α.

$A(\alpha) =$ ____

Na naslednji sliki so navedene vrednosti ploščin za pripadajoče kote α.



Urediti je treba plavalno cono z največjo možno ploščino. S pomočjo gornje slike izračunajte tisto dolžino, ki se pri tem izide za dolžino odseka plaže, iz katerega je moč dostopati v to plavalno cono.

Naloga 3

Brazilija

Brazilija je po površini in po prebivalstvu največja država Južne Amerike.

Leta 2014 je imela Brazilija 202,74 milijonov prebivalcev/-k.

Iz popisov prebivalstva so glede števila prebivalcev/-k znane naslednje številke:

leto	število prebivalstva
1970	94 508 583
1980	121 150 573
1991	146 917 459
2000	169 590 693
2010	190 755 799

Zastavitev naloge:

a) $\boxed{\text{A}}$ Navedite pomen spodaj navedenih vrednosti v kontekstu razvoja števila prebivalstva.

$$\sqrt[10]{\frac{121\,150\,573}{94\,508\,583}} \approx 1{,}02515$$

$$\sqrt[9]{\frac{169\,590\,693}{146\,917\,459}} \approx 1{,}01607$$

Na podlagi obeh navedenih vrednosti utemeljite, zakaj ne moremo razvoja števila prebivalcev/-k v celotnem časovnem obdobju od 1970 do 2010 ustrezno opisati z neko eksponentno funkcijo.

b) Ob predpostavki linearne rasti števila prebivalstva na podlagi števil prebivalcev/-k iz 1991 in 2010, navedite enačbo tiste funkcije f, ki opisuje število prebivalcev/-k. Čas t se pri tem meri v letih, časovni trenutek $t = 0$ ustreza letu 1991.

Izračunajte za koliko odstotkov napoved linearnega modela za leto 2014 odstopa od dejanske vrednosti, navedene v uvodu.

c) Za Brazilijo se za leta od 2010 do 2015 privzemata vsakič konstantna stopnja rojstev $b = 14,6$, kakor tudi konstantna stopnja smrtnosti $d = 6,6$. To pomeni, da je letno 14,6 rojstev na 1 000 prebivalcev/-k in 6,6 smrtnih primerov na 1 000 prebivalcev/-k.

Razvoj števila prebivalcev/-k je moč v tem časovnem obdobju opisati s pomočjo diferenčne enačbe $x_{n+1} = x_n + x_n \cdot \frac{1}{1000} \cdot (b - d) + m_n$, pri čemer x_n opisuje število prebivalcev/-k v letu n in m_n navaja razliko med številom priseljenih in številom izseljenih oseb. Ta razlika se označuje kot selitvena bilanca.

Navedite pomen izraza $x_n \cdot \frac{1}{1000} \cdot (b - d)$ v kontekstu razvoja števila prebivalcev/-k.

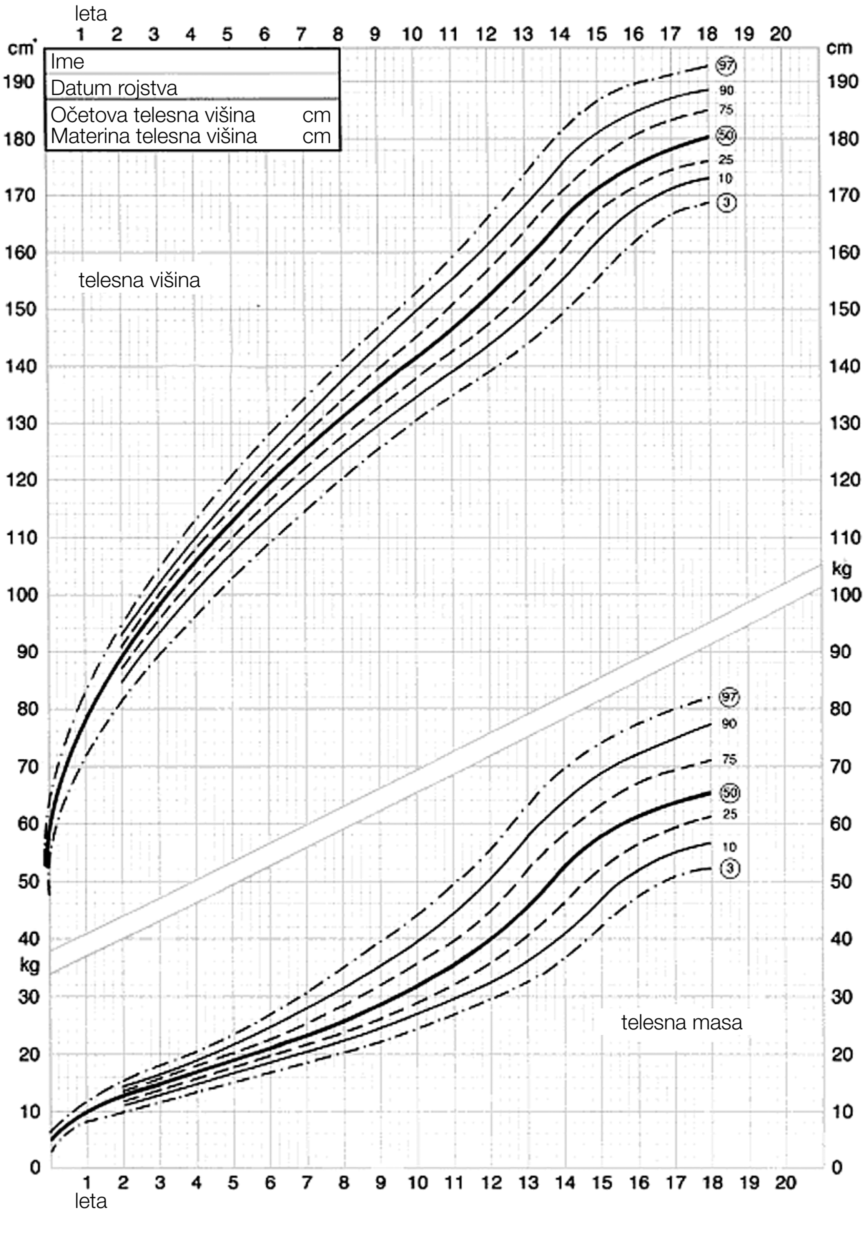
Izračunajte maksimalno velikost selitvene bilance za primer, da je število prebivalcev/-k v letu 2015 glede na število prebivalcev/-k v predhodnem letu večje za največ 1 %.

Naloga 4

Krivulja rasti pri otrocih

Da bi lahko nadzorovali otrokov razvoj telesne višine in teže, so v izkazniei mati-otrok *(Mutter-Kind-Pass)* navedene percentilne krivulje za telesno višino (velikost) in maso (telesna višina v cm, masa v kg). Percentili razdelijo višine in mase otrok v odstotna območja. Če leži vrednost na 10. percentilu rasti, potem je 10 % otrok izbrane starosti manjših ali enako velikih kot navedena vrednost in 90 % večjih ali enako velikih kot navedena vrednost.

Običajno je, da se vse vrednosti, ki so med 3. in 97. percentilom, označujejo kot »normalne«. Naslednji diagram prikazuje krivulje rasti in krivulje telesne mase za dečke v starosti od 0 do 18 let:



Vir: http://www.grosswuchs.de/WachstumTabelleJ.htm [21.05.2014] (prirejeno).

Zastavitev naloge:

a) Neki šolski zdravnik pregleduje slučajni vzorec 8-letnih dečkov iz svojega šolskega okoliša in med drugim zbere njihove telesne mase (v kg). Na podlagi rezultatov te meritve sestavi za delež 8-letnih dečkov iz svojega šolskega okoliša, katerih telesna masa leži v »normalnem območju« [20 kg; 35 kg], simetrični interval zaupanja (konfidenčni interval) [0,8535; 0,9465] s stopnjo zaupanja $\gamma = 0{,}95$.

   V odstotnih točkah navedite razliko med deležem slučajnega vzorca, ki je podlaga temu izračunu, in deležem 8-letnih dečkov s telesno maso v »normalnem območju« glede na diagram.

   Izračunajte število 8-letnih dečkov, ki so bili stehtani za ta statistični vzorec.

b) Privzemimo, da so za nekega določenega otroka znane telesne višine $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, … ob prvem, drugem, tretjem itd. rojstnem dnevu.
   Navedite verbalno ali v obliki formule, kako lahko določimo povprečno hitrost rasti tega otroka v triletnem časovnem obdobju, med 6. in 9. rojstnim dnem.

   Opazujte rast velikosti (telesne višine) na 50. percentilu po 8. letu starosti.
   Navedite približno starost dečkov, pri katerih je trenutna hitrost rasti največja.

c) $\boxed{\text{A}}$ Navedite, kateri od karakterističnih statističnih vrednosti ustreza tista vrednost, ki jo lahko odčitamo na 50. percentilu.

   Pojasnite, katere težave se pojavijo, če želimo iz podanega diagrama, za predstavitev telesnih višin 8-letnih dečkov, sestaviti diagram »Škatla z brki« *(Boxplot)*.