Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^3$

Gegeben ist eine Parameterdarstellung der Geraden g:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Weiters ist ein Punkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ -4 \\ p_3 \end{pmatrix}$ mit $p_1, p_3 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Geben Sie p_1 und p_3 so an, dass der Punkt P auf der Geraden g liegt!

Leitfrage:

Geben Sie an, wie die Gerade g in Bezug zur x-, y- und z-Achse jeweils liegt (parallel, identisch, schneidend bzw. windschief), und begründen Sie Ihre Aussagen!

Weiters ist die Parameterdarstellung der Geraden h in Abhängigkeit von a_1, a_2, a_3 (mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$) gegeben:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Geben Sie an, welche Bedingungen a_1, a_2 und a_3 erfüllen müssen, damit die Geraden g und h aufeinander normal stehen!

Lösung zur Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^3$

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$p_1 = 1$
$p_3 = -5$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Werte korrekt angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Begründungen:

Die Gerade g ist parallel zur y-Achse, weil der Richtungsvektor von g ein Vielfaches vom Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist und der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ nicht auf der y-Achse liegt.

Da die Gerade g zur y-Achse parallel ist und der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ weder in der xy-Ebene noch in der yz-Ebene liegt, ist g windschief zur x-Achse und zur z-Achse.

Aus $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$ folgt, dass a_1 und a_3 frei wählbar sind und $a_2 = 0$ ist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Lagebeziehungen zwischen der Geraden g und den Koordinatenachsen korrekt angegeben und der Lösungserwartung (sinngemäß) entsprechend begründet werden (wobei eine korrekte Argumentation mithilfe von Schrägrissskizzen zulässig ist) sowie korrekte Bedingungen für a_1, a_2 und a_3 angegeben werden.

Aufgabe 2

Temperaturabnahme

Die Temperaturabnahme in einer Wand mit der Dicke D (in cm), an deren Innen- bzw. Außenseite die Temperaturen T_i bzw. T_a (in °C) herrschen, kann mithilfe einer linearen Funktion T mit $T(e) = k \cdot e + d$ modelliert werden. Dabei ist $T(e)$ die Temperatur in °C im Abstand e ($0 \leq e \leq D$, e in cm) von der Wandinnenseite.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Parameter k und d der Gleichung der linearen Funktion T für eine Wand mit $D = 40$, $T_i = 25$ und $T_a = 5$.

$k =$ ____

$d =$ ____

Leitfrage:

Erläutern Sie die Bedeutung der von Ihnen ermittelten Parameter k und d unter Angabe der korrekten Maßeinheiten im gegebenen Kontext!

Geben Sie sowohl für den Parameter k als auch für die Temperatur T_a jeweils einen möglichen Wert an, wenn $D = 40$ cm, $T_i < T_a$ und $d = 20$ gilt! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 2

Temperaturabnahme

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$T(e) = k \cdot e + d$

$T(0) = 25 \;\Rightarrow\; d = 25$
$5 = k \cdot 40 + 25 \;\Rightarrow\; k = -0{,}5$

$T(e) = -0{,}5 \cdot e + 25$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Parameter k und d korrekt ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$d = 25 \;\Rightarrow\;$ Die Temperatur an der Wandinnenseite beträgt 25 °C.
$k = -0{,}5 \;\Rightarrow\;$ Die Temperatur nimmt pro cm (Wand) um 0,5 °C ab.

Mögliche Vorgehensweise:
$d = 20 = T_i \;\Rightarrow\;$ z. B. $T_a = 30$; Temperaturunterschied zwischen Wandinnenseite und Wandaußenseite beträgt 10 $\Rightarrow\; k = 0{,}25$, somit ändert sich die Temperatur um 0,25 °C pro cm.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Bedeutung der Parameter k und d unter Angabe der Maßeinheiten korrekt erläutert wird und mögliche Werte für k und T_a angegeben werden. Die Vorgehensweise muss nachvollziehbar erläutert werden, wobei jedenfalls für T_a ein Wert größer 20 gewählt werden muss.

Aufgabe 3

Wachstum einer Pflanze

In einem Gewächshaus wird das Wachstum einer Pflanze unter kontrollierten Bedingungen über einen Zeitraum von 20 Wochen beobachtet. Zu Beginn der Beobachtung weist die Pflanze eine Höhe von 10 cm auf. Innerhalb der ersten 5 Wochen wird festgestellt, dass die Höhe der Pflanze pro Woche um 15 % zunimmt. Nach Ablauf der ersten 5 Wochen ändern sich die Bedingungen im Gewächshaus.

Aufgabenstellung:

Die Pflanzenhöhe innerhalb der ersten 5 Wochen kann durch die Funktion f modelliert werden. Dabei gibt $f(t)$ die Höhe der Pflanze in cm t Wochen nach Beobachtungsbeginn an.

Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an und berechnen Sie die Höhe der Pflanze 5 Wochen nach Beobachtungsbeginn!

Leitfrage:

In der nachstehenden Tabelle ist die Höhe der Pflanze zu einigen weiteren Zeitpunkten angegeben.

Anzahl der vergangenen Wochen (seit Beobachtungsbeginn)	Höhe der Pflanze (in cm, gerundet auf mm)
7	22,7
11	25,2
20	29,8

Gerhard behauptet, dass gemäß den vorliegenden Daten das Wachstum der Pflanze nach Ablauf der ersten 5 Wochen nicht mehr exponentiell erfolgt.

Geben Sie an, ob diese Aussage richtig oder falsch ist, und begründen Sie mithilfe einer passenden Berechnung Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 3

Wachstum einer Pflanze

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f(t) = 10 \cdot 1{,}15^t$

$f(5) = 10 \cdot 1{,}15^5 \approx 20{,}1$

Nach 5 Wochen beträgt die Höhe der Pflanze ca. 20,1 cm.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung für f angegeben und die Höhe der Pflanze nach 5 Wochen korrekt berechnet wird.
Toleranzintervall: [20,0 cm; 20,2 cm]
Äquivalente Gleichungen für f (z. B. in der Form $f(t) = 10 \cdot e^{0{,}13976... \cdot t}$) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Gerhards Aussage ist richtig, da nach Ablauf der ersten 5 Wochen keine konstanten wöchentlichen Wachstumsraten (insbesondere keine 15%ige Wachstumsrate) vorliegen.

Mögliche Berechnung:

Der prozentuelle Zuwachs (relative Änderung) pro Woche beträgt ...

- im Zeitintervall [5; 7]: $\sqrt{\frac{22{,}7}{20{,}1}} = 1{,}0627...$ ⇒ wöchentliche Wachstumsrate: ca. 6,3 %
- im Zeitintervall [7; 11]: $\sqrt[4]{\frac{25{,}2}{22{,}7}} = 1{,}0264...$ ⇒ wöchentliche Wachstumsrate: ca. 2,6 %
- im Zeitintervall [11; 20]: $\sqrt[9]{\frac{29{,}8}{25{,}2}} = 1{,}0188...$ ⇒ wöchentliche Wachstumsrate: ca. 1,9 %

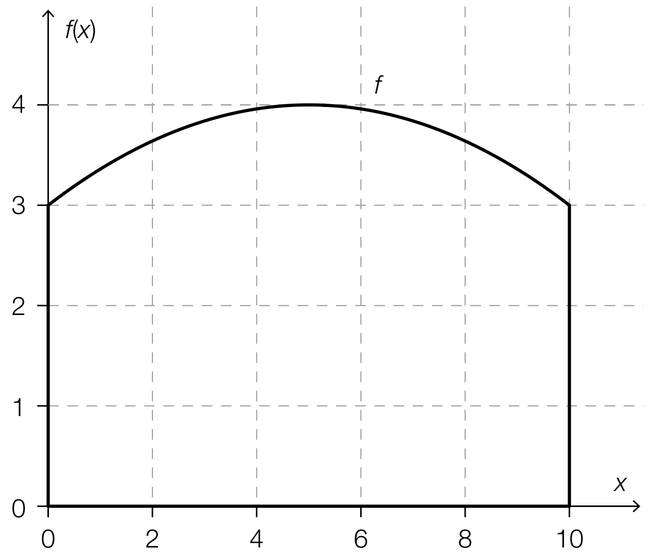
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Richtigkeit der Aussage angegeben und durch eine Berechnung korrekt begründet wird.
Andere korrekte Begründungen (die sich auf eine passende Berechnung stützen) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Wandfläche

Eine Wandfläche hat drei geradlinige Berandungen, die durch die x-Achse, die senkrechte Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 10$ modelliert werden können. Die vierte Grenze kann durch eine Polynomfunktion f zweiten Grades mit der Gleichung $f(x) = -0{,}04 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 3$ modelliert werden. Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft den Verlauf der Grenzen dieser Wand (Maße in Metern).



Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Stammfunktion F von f an und bestimmen Sie den Inhalt der Wandfläche mithilfe dieser Stammfunktion!

Leitfrage:

Die Wandfläche soll in Teilbereichen mit unterschiedlichen Farben bemalt werden.

Variante 1:

Die Wandfläche soll durch zwei zur senkrechten Achse parallele Geraden in drei flächengleiche Teile geteilt werden.

Zeigen Sie, dass die erste Gerade die Gleichung $x = 3{,}46$ hat, und geben Sie die Gleichung der zweiten Geraden an!

Variante 2:

Die Wandfläche soll durch eine zur x-Achse parallele Gerade in der Höhe h in zwei flächengleiche Teile geteilt werden.

Berechnen Sie h!

Lösung zur Aufgabe 4

Wandfläche

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Stammfunktion: $F(x) = -\frac{0,04 \cdot x^3}{3} + 0,2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$

$F(10) - F(0) = \frac{110}{3} \approx 36,67 \Rightarrow$ Der Inhalt der Wandfläche beträgt ca. 36,67 m².

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine Stammfunktion F von f korrekt angegeben und der Inhalt der Wandfläche mithilfe dieser Stammfunktion korrekt bestimmt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Variante 1:
$\int_0^{3,46} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{110}{9}$ und dies entspricht einem Drittel der oben berechneten Wandfläche.
Gleichung der zweiten Geraden: $x = 10 - 3,46$ bzw. $x = 6,54$

Variante 2:
$10 \cdot h = \frac{110}{6} \Rightarrow h = \frac{11}{6} \approx 1,83$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für Variante 1 ein korrekter Nachweis und eine richtige Gleichung der zweiten Geraden angegeben werden sowie für Variante 2 die Höhe h richtig berechnet wird.
Toleranzintervall für die zweite senkrechte Gerade: [6,5; 6,6]
Toleranzintervall für die Höhe h: [1,8; 1,9]

Aufgabe 5

Multiple-Choice-Test

Bei einem Multiple-Choice-Test mit zehn Aufgaben gibt es jeweils fünf Antwortmöglichkeiten, von denen immer genau eine Antwort richtig ist.

Patrick muss raten und kreuzt bei jeder Aufgabe willkürlich eine der Antwortmöglichkeiten an.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie jeden Summanden des Ausdrucks $1 - (0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \cdot 45 + 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10})$ im gegebenen Kontext und geben Sie dasjenige Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit diesem Ausdruck berechnet wird!

Leitfrage:

Zum Bestehen des Tests muss mehr als die Hälfte der Aufgaben richtig gelöst werden.

Yvonne löst vier Aufgaben richtig, bei den restlichen Aufgaben muss sie raten und kreuzt jeweils willkürlich eine Antwortmöglichkeit an.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass Yvonne den Test besteht, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 5

Multiple-Choice-Test

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Wahrscheinlichkeit, eine Aufgabe richtig zu lösen, beträgt 0,2.
Der Summand $0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \cdot 45$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, genau zwei Fragen richtig zu beantworten, der mittlere Summand gibt die Wahrscheinlichkeit an, genau eine Frage richtig zu beantworten und der Summand $0{,}8^{10}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, keine Frage richtig zu beantworten.

Das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit diesem Ausdruck berechnet wird, lautet:
Patrick löst mindestens drei Aufgaben richtig.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn jeder Summand (sinngemäß) korrekt interpretiert und das Ereignis (sinngemäß) korrekt angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$1 - (0{,}8^5 \cdot 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}8^6)$

Yvonne besteht den Test, wenn sie bei mindestens zwei der sechs restlichen Aufgaben die richtige Antwort ankreuzt.
Die Berechnung kann mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit erfolgen:
$1 - (P(\text{„eine richtige Antwort“}) + P(\text{„keine richtige Antwort“}))$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.