# Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

oktober 2017

# Matematika

Kompenzacijski izpit 1

Podatki za **izpraševalce / izpraševalke**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

# Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence (*Grundkompetenzen*), pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju (*Kommunikationsfähigkeit*).

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko (*Grundkompetenzpunkt*), z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko (*Leitfragenpunkt*). Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

| ocena | | najmanjše število doseženih točk |
|---|---|---|
| »Genügend« | zadostno | 4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk<br>3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka |
| »Befriedigend« | povoljno | 5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk<br>4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka<br>3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki |
| »Gut« | dobro | 5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka<br>4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki<br>3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke |
| »Sehr gut« | prav dobro | 5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki<br>4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke |

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

# Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

| | doseženih osnovnokompetenčnih točk | doseženih dodatnih točk |
|---|---|---|
| naloga 1 | | |
| naloga 2 | | |
| naloga 3 | | |
| naloga 4 | | |
| naloga 5 | | |

# Naloga 1

## Premice v $\mathbb{R}^3$

Dana je parametrična predstavitev premice $g$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pri } t \in \mathbb{R}$$

**Zastavitev naloge:**

Nadalje je podana točka $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ -4 \\ p_3 \end{pmatrix}$ pri $p_1, p_3 \in \mathbb{R}$.

Navedite $p_1$ in $p_3$ tako, da bo točka $P$ ležala na premici $g$.

**Nadaljevalno vprašanje:**

Navedite, kako leži premica $g$ vsakič glede na $x$-, $y$- in $z$-os (je vzporedna, je identična, seka oz. je poševna) in pojasnite svoje trditve.

Nadalje je podana parametrična predstavitev premice $h$, v odvisnosti od $a_1$, $a_2$, $a_3$ (pri $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$).

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ pri } s \in \mathbb{R}$$

Navedite, katere pogoje morajo izpolnjevati $a_1$, $a_2$ in $a_3$, da bosta premici $g$ in $h$ med seboj pravokotni.

# Rešitev naloge 1

## Premice v $\mathbb{R}^3$

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$p_1 = 1$
$p_3 = -5$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta obe vrednosti pravilno navedeni.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možne utemeljitve:

Premica $g$ je vzporedna $y$-osi, ker je smerni vektor premice $g$ večkratnik vektorja $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in točka $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ne leži na $y$-osi.

Ker je premica $g$ vzporedna $y$-osi in točka $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ne leži niti v $xy$-ravnini niti v $yz$-ravnini, je $g$ poševna glede na $x$-os in glede na $z$-os.

Iz $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$ sledi, da lahko $a_1$ in $a_3$ prosto izbiramo in $a_2 = 0$.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če so odnosi lege med premico $g$ in koordinatnimi osmi pravilno navedeni in utemeljeni (smiselno) ustrezno pričakovani rešitvi (pri čemer so dopustne utemeljitve s pomočjo skic v poševni projekciji), kakor tudi navedeni pravilni pogoji za $a_1$, $a_2$ in $a_3$.

# Naloga 2

## Zniževanje temperature

V neki steni z debelino $D$ (v cm), ob kateri vladata na notranji- oz. zunanji strani temperaturi $T_n$ in $T_z$ (v °C), je moč zniževanje temperature modelirati s pomočjo linearne funkcije $T$ pri $T(e) = k \cdot e + d$. Pri tem je $T(e)$ temperatura v °C na oddaljenosti $e$ ($0 \leq e \leq D$, $e$ v cm) od notranje strani stene.

Zastavitev naloge:

Določite parametra $k$ in $d$, pri enačbi linearne funkcije $T$, za steno z $D = 40$, $T_n = 25$ in $T_z = 5$.

$k$ = ____________________________________________

$d$ = ____________________________________________

Nadaljevalno vprašanje:

Pojasnite pomen parametrov $k$ in $d$, ki ste ju določili, pri navedbi pravilnih merskih enot v danem kontekstu.

Navedite, tako za parameter $k$ kakor tudi za temperaturo $T_z$, vsakič možno vrednost, če velja $D = 40$, $T_n < T_z$ in $d = 20$. Pojasnite svoj postopek.

# Rešitev naloge 2

## Zniževanje temperature

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$T(e) = k \cdot e + d$

$T(0) = 25 \;\Rightarrow\; d = 25$
$5 = k \cdot 40 + 25 \;\Rightarrow\; k = -0{,}5$

$T(e) = -0{,}5 \cdot e + 25$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta parametra *k* in *d* pravilno določena.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$d = 25 \;\Rightarrow\;$ temperatura na notranji strani stene znaša 25 °C
$k = -0{,}5 \;\Rightarrow\;$ temperatura pojema za 0,5 °C na cm (stene)

Možen postopek:
$d = 20 = T_n \;\Rightarrow\;$ npr. $T_z$ =30; temperaturna razlika med notranjo stranjo stene in zunanjo stranjo stene znaša 10 $\Rightarrow$ $k = 0{,}25$, s tem se temperatura spremeni za 0,25 °C na cm.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je pravilno pojasnjen pomen parametrov *k* in *d* pri navedbi merskih enot in so navedene možne vrednosti za *k* in $T_z$. Postopek mora biti razumljivo pojasnjen, pri čemer mora biti na vsak način za $T_z$ izbrana vrednost večja od 20.

# Naloga 3

## Razvoj rastline

V nekem rastlinjaku opazujejo razvoj neke rastline, pod nadzorovanimi pogoji, v časovnem obdobju 20 tednov. Ob začetku opazovanja ima rastlina višino 10 cm. Med prvimi 5 tedni je ugotovljeno, da se je višina rastline povečala za 15 % na teden. Po preteku prvih 5 tednov se pogoji v rastlinjaku spremenijo.

Zastavitev naloge:

V prvih 5 tednih je moč višino rastline modelirati s funkcijo $f$. Pri tem podaja $f(t)$ višino rastline v cm $t$ tednov po od začetku opazovanja.

Navedite enačbo funkcije $f$ in izračunajte višino rastline 5 tednov po začetku opazovanja.

Nadaljevalno vprašanje:

V naslednji preglednici je navedena višina rastline ob nekaj nadaljnjih časovnih trenutkih.

| število preteklih tednov<br>(od začetka opazovanja) | višina rastline<br>(v cm, zaokroženo na mm) |
|---|---|
| 7 | 22,7 |
| 11 | 25,2 |
| 20 | 29,8 |

Gerhard zatrjuje, da razvoj rastline glede na predložene podatke, po preteku prvih 5 tednov, več ne poteka eksponentno.

Navedite, če je ta izjava pravilna ali napačna ter, s pomočjo ustreznega izračuna, utemeljite svojo izjavo.

# Rešitev naloge 3

## Razvoj rastline

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$f(t) = 10 \cdot 1{,}15^t$

$f(5) = 10 \cdot 1{,}15^5 \approx 20{,}1$

Po 5 tednih znaša višina rastline ca. 20,1 cm.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je navedena pravilna enačba za $f$ in je pravilno izračunana višina rastline po 5 tednih.
Tolerančni interval: [20,0 cm; 20,2 cm]
Tudi ekvivalentne enačbe za $f$ (npr. v obliki $f(t) = 10 \cdot e^{0{,}13976... \cdot t}$) je vrednotiti kot pravilne.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Gerhardova izjava je pravilna, ker po preteku prvih 5 tednov ne obstajajo konstantne tedenske stopnje rasti (zlasti ne 15 % stopnja rasti).

Možen izračun:

Tedenski odstotni prirastek (relativna sprememba) znaša:

- v časovnem intervalu [5; 7]: $\sqrt{\frac{22{,}7}{20{,}1}} = 1{,}0627...$ ⇒ tedenska stopnja rasti: ca. 6,3 %
- v časovnem intervalu [7; 11]: $\sqrt[4]{\frac{25{,}2}{22{,}7}} = 1{,}0264...$ ⇒ tedenska stopnja rasti: ca. 2,6 %
- v časovnem intervalu [11; 20]: $\sqrt[9]{\frac{29{,}8}{25{,}2}} = 1{,}0188...$ ⇒ tedenska stopnja rasti: ca. 1,9 %

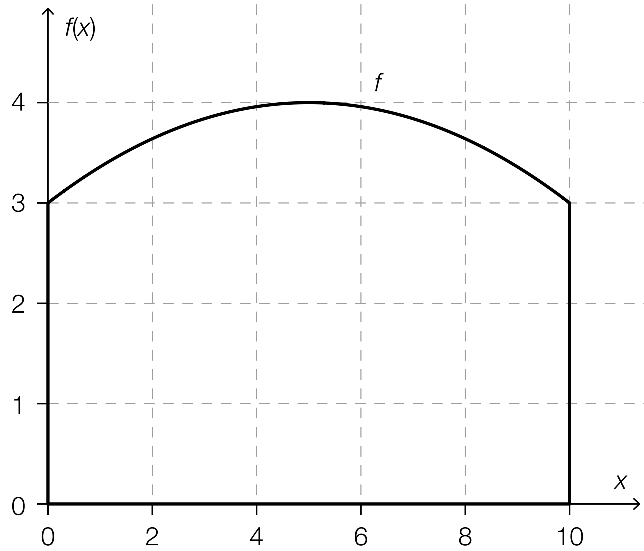
Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je pravilnost izjave navedena in z izračunom pravilno utemeljena.
Tudi druge korektne utemeljitve (ki se opirajo na ustrezni izračun), je vrednotiti kot pravilne.

# Naloga 4

## Ploskev stene

Ploskev neke stene ima tri ravne meje, ki jih lahko modeliramo z $x$-osjo, navpično osjo in premico z enačbo $x = 10$. Četrto mejo lahko modeliramo s polinomsko funkcijo $f$ druge stopnje, z enačbo $f(x) = -0{,}04 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 3$. Naslednja slika modelno prikazuje potek meja te stene (dimenzije v metrih).




Zastavitev naloge:

Navedite primitivno funkcijo (*prvotno funkcijo*) $F$ funkcije $f$ in določite ploščino ploskve opisane stene s pomočjo te primitivne funkcije.

Nadaljevalno vprašanje:

Ploskev stene je potrebno po delih pobarvati z različnimi barvami.

Različica 1:

Ploskev stene je potrebno z dvema premicama, vzporednima z navpično osjo, razdeliti na tri ploščinsko enake dele.

Pokažite, da ima prva premica enačbo $x = 3{,}46$ in navedite enačbo druge premice.

Različica 2

Ploskev stene je potrebno s premico, vzporedno z $x$-osjo, na višini $h$ razdeliti na dva ploščinsko enaka dela.

Izračunajte $h$.

# Rešitev naloge 4

## Ploskev stene

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

možna primitivna funkcija: $F(x) = -\frac{0{,}04 \cdot x^3}{3} + 0{,}2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$

$F(10) - F(0) = \frac{110}{3} \approx 36{,}67 \quad \Rightarrow$ ploščina stene znaša ca. 36,67 $m^2$.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je pravilno navedena primitivna funkcija $F$ funkcije $f$ in s pomočjo te primitivne funkcije pravilno določena ploščina stene.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Različica 1:
$\int_0^{3{,}46} f(x)\,dx = \frac{110}{9}$ in to ustreza tretjini zgoraj izračunane ploščine stene.
Enačba druge premice: $x = 10 - 3{,}46$ oz. $x = 6{,}54$

Različica 2:
$10 \cdot h = \frac{110}{6} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{11}{6} \approx 1{,}83$

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko sta za različico 1 navedena pravilen dokaz in pravilna enačba druge premice, kakor tudi za različico 2 pravilno izračunana višina $h$.
tolerančni interval za drugo navpično premico: [6,5; 6,6]
tolerančni interval za višino $h$: [1,8; 1,9]

# Naloga 5

## Multiple-choice-test

Pri nekem multiple-choice-testu z desetimi nalogami je vsakič po pet možnosti odgovora, od katerih je vedno natanko en odgovor pravilen.

Patrick mora ugibati in naredi pri vsaki nalogi križec pri poljubno izbrani možnosti odgovora.

Zastavitev naloge:

Interpretirajte vsak seštevanec (sumand) izraza $1 - (0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \cdot 45 + 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10})$ v danem kontekstu in navedite dogodek, čigar verjetnost se izračuna s tem izrazom.

Nadaljevalno vprašanje:

Da je test opravljen, mora biti pravilno rešenih več kot polovica nalog.

Yvonne reši štiri naloge pravilno, pri preostalih nalogah mora ugibati in vsakič naredi križec pri poljubno izbrani možnosti odgovora.

Navedite izraz za izračun verjetnosti, da Yvonne test opravi, ter pojasnite svoj postopek.

# Rešitev naloge 5

## Multiple-choice-test

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Verjetnost, da je naloga pravilno rešena, znaša 0,2.
Sumand $0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \cdot 45$ navaja verjetnost, da sta natanko dve vprašanji odgovorjeni pravilno, srednji sumand navaja verjetnost, da je pravilno odgovorjeno natanko eno vprašanje in sumand $0{,}8^{10}$ navaja verjetnost, da nobeno vprašanje ni odgovorjeno pravilno.

Dogodek, čigar verjetnost se s tem izrazom računa, se glasi: Patrik pravilno reši vsaj tri naloge.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je vsak sumand (smiselno) pravilno interpretiran in (smiselno) pravilno naveden dogodek.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$1 - (0{,}8^5 \cdot 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}8^6)$

Yvonne opravi test, če pri vsaj dveh od preostalih šestih vprašanj naredi križec pri pravilnem odgovoru.
Izračun lahko poteka s pomočjo nasprotne verjetnosti:
1 – ($P$(»pravilen odgovor«) + $P$(»nepravilen odgovor«))

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je naveden pravilen izraz in pojasnjen pravilen postopek.
Ekvivalentne izraze je vrednotiti kot pravilne.