

Ime:	
Razred:	



Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni izpit

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

16. januar 2018

Matematika

2. del – naloge

--

Navodila za reševanje nalog

Spoštovana kandidatka! Spoštovani kandidat!

Delovni zvezek z nalogami 2. dela, ki je pred Vami, vsebuje štiri naloge z vsakič po dvema do štirimi delnimi nalogami, pri čemer so vse delne naloge rešljive neodvisno druga od druge.

Na voljo imate 150 minut čistega časa za reševanje.

Uporabljajte pisalo v modri ali črni barvi, ki ga ni moč odstraniti z radirko. Pri konstrukcijskih nalogah lahko uporabite tudi svinčnik.

Za reševanje uporabljajte ta delovni zvezek in liste, ki so vam dani na razpolago! Svoje ime in priimek vpišite na prvi strani delovnega zvezka v za to predvideno polje in na vsak posamezni list, ki ga boste uporabili! Pri reševanju vsake posamezne delne naloge navedite njeno oznako!

Pri vrednotenju bo upoštevano vse, kar ni prečrtano. Rešitev naloge mora biti pri tem jasno razvidna. Če rešitev ni jasno razvidna, ali če so navedene različne rešitve, velja naloga za nerešeno. Svoje zapiske prečrtajte.

Pri reševanju smete uporabljati dovoljeno zbirko formul in običajne elektronske pripomočke.

Oddati je potrebno delovni zvezek in vse liste, ki jih boste uporabljali.

Vrednotenje

Vsaka naloga iz 1. dela bo ovrednotena z 0 točk ali z 1 točko, vsaka delna naloga iz 2. dela pa z 0, 1 ali 2 točkama. Z označene zastavitve nalog bodo ovrednotene z 0 točk ali z 1 točko.

- Če bo v 1. delu pravilno rešenih vsaj 16 od 24 nalog, bo delo ocenjeno pozitivno.
- Če bo v 1. delu pravilno rešenih manj kot 16 od 24 nalog, bodo za izravnavo bistvenega območja znanja, v skladu z odredbo o ocenjevanju znanj, upoštewane z označene naloge iz 2. dela. Če bo ob upoštevanju z označenih nalog iz 2. dela vsaj 16 nalog pravilno rešenih, bo delo ocenjeno pozitivno. Če pa bo tudi z upoštevanjem z označenih nalog iz 2. dela pravilno rešenih manj kot 16 nalog, bo delo ocenjeno z »nezadostno«.
- Če bo v 1. delu (ob upoštevanju izravnalnih točk) doseženih vsaj 16 točk, se bo delo ocenjevalo po naslednjem ključu:

Genügend	zadostno	16 – 23 točk
Befriedigend	povoljno	24 – 32 točk
Gut	dobro	33 – 40 točk
Sehr gut	prav dobro	41 – 48 točk

Pojasnilo k formatom odgovorov

Nekatere naloge imajo **proste formate odgovorov**; pri tem Vaš odgovor vpišete v delovni zvezek neposredno pod vsakokratno zastavitev naloge. Nadaljnji formati odgovorov, ki lahko pridejo v poštev pri pisnem izpitu (klavzuri), so predstavljeni kot sledi:

Prيرهevalni format: za ta format je značilno več izjav (oz. tabel ali slik), nasproti katerim stoji več možnosti odgovorov. Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da vsaki izjavi priredite ustrezno možnost odgovora z vnosom odgovoru pripadajoče črke!

Primer:

Dani sta dve enačbi.

$1 + 1 = 2$	A
$2 \cdot 2 = 4$	C

A	seštevanje
B	deljenje
C	množenje
D	odštevanje

Zastavitev naloge:

Danima enačbama priredite vsakič ustrezno oznako (izmed možnosti A do D).

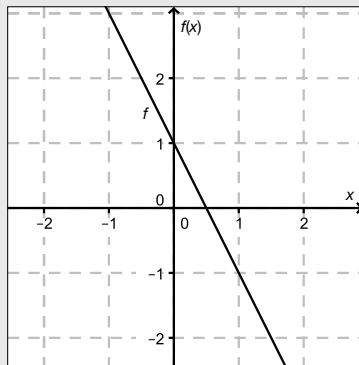
Konstruktivski format: Podana je naloga in zastavitev vprašanja. Naloga zahteva dopolnitev s točkami, premicami in/ali krivuljami v delovni zvezek.

Primer:

Dana je linearna funkcija f z $f(x) = k \cdot x + d$.

Zastavitev naloge:

V dani koordinatni sistem narišite graf linearne funkcije pri pogojih: $k = -2$ in $d > 0$.



Format multiple-choice v različici »1 izmed 6«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in šest možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno možnost odgovora**. Naloga tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite edino pravilno možnost odgovora!

Primer:

Katera enačba je pravilna?

Zastavitev naloge:

S križcem označite ustrezno enačbo.

$1 + 1 = 1$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 2$	<input type="checkbox"/>
$3 + 3 = 3$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 8$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 5$	<input type="checkbox"/>
$6 + 6 = 6$	<input type="checkbox"/>

Format multiple-choice v različici »2 izmed 5«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in pet možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **dve možnosti odgovora**. Naloga tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite obe pravilni možnosti odgovora!

Primer:

Kateri enačbi sta pravilni?

Zastavitev naloge:

S križcem označite obe ustrezni enačbi.

$1 + 1 = 1$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 3$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 8$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 5$	<input type="checkbox"/>

Format multiple-choice v različici »x izmed 5«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in pet možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno, dve, tri, štiri ali pet možnosti odgovora**. V zastavitvi naloge vedno najdete zahtevo »S križcem označite veljavno(-e) izjavo(-e)/ enačbo(-e)/ ...!« Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da s križcem označite pravilno možnost/ pravilne možnosti odgovora!

Primer:
Katera(-e) izmed navedenih enačb je/ so pravilna(-e)?

$1 + 1 = 2$	<input checked="" type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 6$	<input checked="" type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input type="checkbox"/>
$5 + 5 = 10$	<input checked="" type="checkbox"/>

Zastavitev naloge:
S križcem označite ustrezno(-e) enačbo(-e).

Luknjičasto besedilo: Za ta format odgovora je značilen stavek z dvema vrzelima (luknjama), kar pomeni, da sta v besedilu naloge izpostavljeni dve mesti, ki ju je potrebno dopolniti. Za vsako vrzel (luknjo) so podane tri možnosti vnosa. Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da za vsako od vrzel (lukenj) s križcem označite obe pravilni možnosti vnosa!

Primer:
Dane so 3 enačbe.

Zastavitev naloge:
V naslednjem stavku dopolnite vrzeli (luknje) v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezne dele stavka tako, da nastane pravilna izjava.

Operacija, predstavljena z enačbo _____ ① _____, se imenuje izračunavanje vsote ali _____ ② _____.

①		②	
$1 - 1 = 0$	<input type="checkbox"/>	množenje (multiplikacija)	<input type="checkbox"/>
$1 + 1 = 2$	<input checked="" type="checkbox"/>	odštevanje (subtrakcija)	<input type="checkbox"/>
$1 \cdot 1 = 1$	<input type="checkbox"/>	seštevanje (adicija)	<input checked="" type="checkbox"/>

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, pri katerih je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v zeleni okvirček.

$1 + 1 = 3$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 5$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input type="checkbox"/>
$5 + 5 = 9$	<input checked="" type="checkbox"/>

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor » $5 + 5 = 9$ «, nato pa spremenjen na » $2 + 2 = 4$ «.

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite zeleni prebarvani okvirček.

$1 + 1 = 3$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 5$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 9$	<input type="checkbox"/>

Tukaj je bil odgovor » $2 + 2 = 4$ « najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

Če imate še kakšno vprašanje, se prosimo obrnite na svojo učiteljico/ svojega učitelja!

Veliko uspeha pri reševanju!

Naloga 1

Funkcija

Dana je kvadratna funkcija f pri $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ s koeficienti $a, b, c \in \mathbb{R}$.

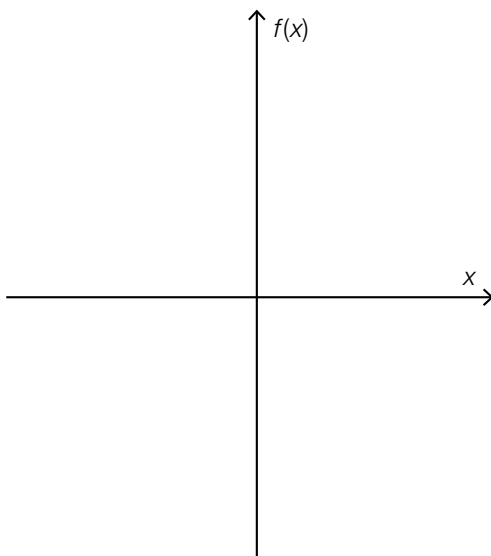
Zastavitev naloge:

- a) Določite koordinate tiste točke P na grafu ene take funkcije f , v kateri ima vzpon (smerni koeficient) tangente na graf funkcije f vrednost b in navedite tudi (splošno) enačbo te tangente t .

Graf ene take funkcije f poteka skozi točko $A = (-1|20)$ in ima v točki P tangento t pri $t(x) = 9 \cdot x + 4$. Za to funkcijo f navedite vrednosti za a, b in c .

- b) Navedite a v odvisnosti od b in c tako, da bo imela funkcija f natanko eno ničlo.

V spodnji koordinatni sistem skicirajte enega od možnih grafov ene take funkcije f z natanko eno ničlo ter $a > 0, b > 0, c > 0$.



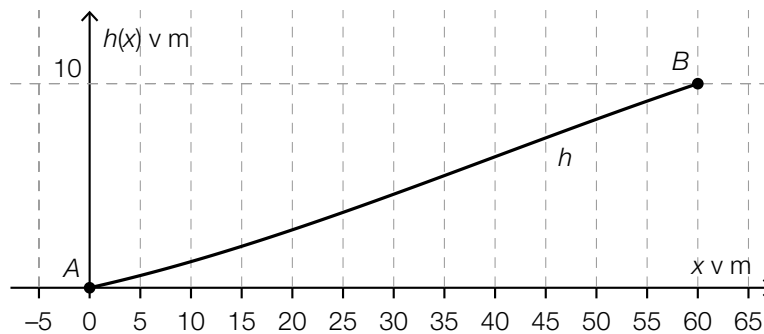
- c) Za $a = 16$ in $c = 9$ navedite tako mesto lokalnega ekstrema funkcije f kakor tudi pripadajočo funkcijsko vrednost v odvisnosti od b .

Pokažite, da leži ta ekstremna točka neodvisno od izbire b na grafu funkcije g pri $g(x) = 9 - 16 \cdot x^2$.

Naloga 2

Vzpenjajoča se cesta

Avtomobil prevozi v določenem časovnem intervalu, na nekem vzpenjajočem se odseku ceste brez ovinkov, pot med točkama A in B . Višinski potek tega cestnega odseka med A in B je, glede na nivo točke A , modeliran z grafom neke polinomske funkcije h v odvisnosti od x . Pri tem je x vodoravna oddaljenost avtomobila (modeliranega v obliki točke) od izhodiščne točke A in $h(x)$ vsakokratna višina pozicije avtomobila nad nivojem točke A ($h(x)$ v m, x v m). V tem modelu imata točki A in B koordinate $A = (0|0)$ in $B = (60|10)$.



Enačba funkcije h se glasi:

$$h(x) = \frac{1}{64800} \cdot (-x^3 + 120 \cdot x^2 + 7200 \cdot x) \text{ za } x \in [0; 60]$$

Zastavitev naloge:

- a) Navedite vrednost diferenčnega kvocienta funkcije h na intervalu $[0; 60]$ in interpretirajte to vrednost v danem kontekstu.

Neka oseba trdi: »Če je lahko (poljuben) vzpenjajoči se cestni odsek, modeliran s polinomsko funkcijo tretje stopnje, katere prevoj leži na tem odseku, potem gre pri tem prevoju za tisto mesto, na katerem se cesta najbolj strmo vzpenja.«

Navedite, ali ta trditev z gotovostjo drži in utemeljite svojo odločitev.

- b) Načrtovana je novogradnja ceste, pri čemer naj bi imela po novogradnji cesta med A in B konstantni vzpon.

Določite enačbo funkcije h_1 , ki opisuje potek nove ceste med A in B , pri čemer je $h_1(x)$ zopet višina (v m) pozicije avtomobila nad nivojem točke A .

Izračunajte tisti kot α , pod katerim se na novo zgrajena cesta vzpenja (glede na horizontalo).

- c) Pri vožnji v hribe nastane neprijeten pritisk na bobnič, ki ga mnogo ljudi opisuje kot »tiščanje« v ušesih. Privzamemo lahko, da pri neki osebi v avtomobilu nastane ta neprijeten občutek pritiska, če trenutna hitrost spreminjanja višine prekorači vrednost 4 m/s.

Funkcija g pri $g(t) = \frac{1}{5} \cdot t^2 + t$ modelira pozicijo avtomobila nad nivojem A med vožnjo od $A = (0|0)$ proti $B = (60|10)$ v odvisnosti od časa. Pri tem $g(t)$ opisuje, na kateri višini se nahaja avtomobil v trenutku t ($g(t)$ v metrih; t v sekundah, merjeno od trenutka, v katerem se avtomobil nahaja v točki A).

Izračunajte, koliko sekund traja vožnja od A do B .

Navedite, ali trenutna hitrost spreminjanja višine v tem razdobju prekorači vrednost 4 m/s in utemeljite svojo odločitev.

Naloga 3

Human Development Index

Human Development Index (*HDI*) Združenih narodov je indikator blagostanja za države, ki naj bi omogočil merjenje stopnje razvitosti dotične države.

HDI vsebuje tri brez-dimenzijske količine (indeks pričakovane življenjske dobe (*LEI*), indeks izobrazbe (*BI*) in indeks dohodka (*EI*)) in se izračunava s formulo $HDI = \sqrt[3]{LEI \cdot BI \cdot EI}$.

Brez-dimenzijsko pomeni, da te količine nimajo merskih enot.

Za izračun indicev *LEI* in *EI* velja od leta 2010:

$$LEI = \frac{LE - 20}{85 - 20}, \text{ pri čemer opisuje } LE \text{ pričakovano življenjsko dobo ob rojstvu, v letih}$$

$$EI = \frac{\ln(B) - \ln(100)}{\ln(75000) - \ln(100)}, \text{ pri čemer opisuje } B \text{ bruto domači proizvod na prebivalca v ameriških dolarjih (vedno ob začetku leta)}$$

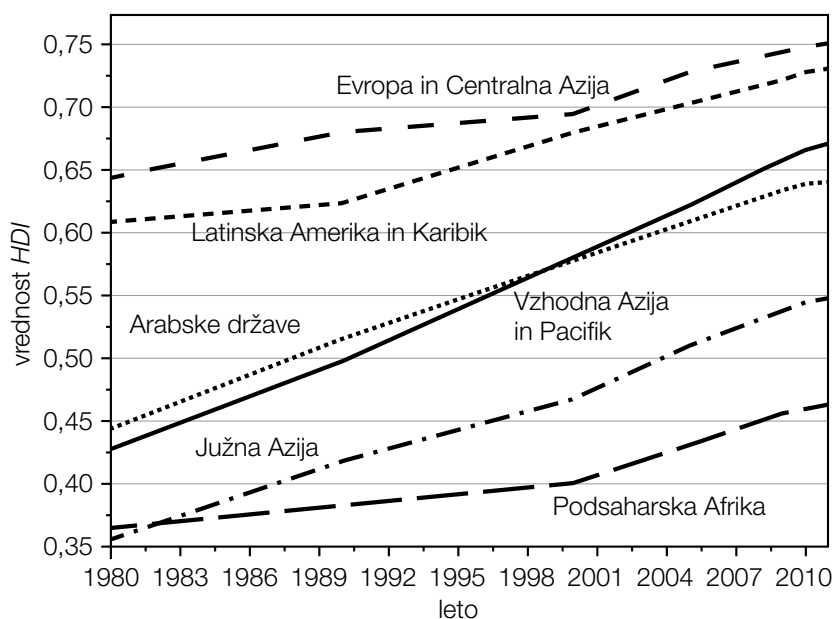
Po letu 2009 deli razvojni program Združenih narodov države po vrednosti *HDI* v štiri razvojne kategorije:

razvojna kategorija države	vrednost <i>HDI</i>
E_1	$\geq 0,8$
E_2	$[0,7; 0,8)$
E_3	$[0,55; 0,7)$
E_4	$< 0,55$

Vir podatkov: Deutsche Gesellschaft für die Vereinten Nationen (izdajatelj): *Bericht über die menschliche Entwicklung 2015. Arbeit und menschliche Entwicklung*. Berlin: Berliner Wissenschafts-Verlag 2015, s. 240.

HDI neke regije v določenem letu se dobi iz aritmetične sredine *HDI*-jev držav, ki se štejejo v to regijo.

V nadaljevanju je upodobljen razvoj *HDI* različnih regij med 1980 in 2011.

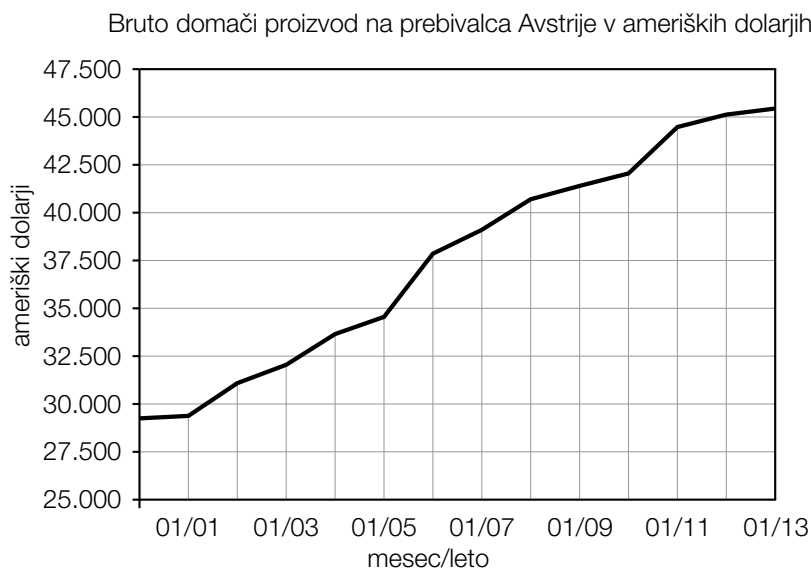


Vir podatkov: https://de.wikipedia.org/wiki/Index_der_menschlichen_Entwicklung#/media/File:Human-Development-Index-Trends-2011.svg [08.06.2017].

Zastavitev naloge:

- a) Za Avstrijo je bila v *Human Development Report* za leto 2013 navedena pričakovana življenjska doba z $LE = 81,1$ leti in indeks izobrazbe z $BI = 0,819$.

Naslednja slika prikazuje bruto domači proizvod na prebivalca Avstrije v ameriških dolarjih (vsakič ob začetku leta) za leta 2000 do 2013.



Vir podatkov: <http://www.factfish.com/de/statistik/bruttonationaleinkommen> [08.06.2017].

Določite HDI Avstrije za leto 2013 ($= HDI_{2013}$).

HDI Avstrije za leto 2013 (HDI_{2013}) je bil za ca. 2,5 % višji kot HDI Avstrije za leto 2008 (HDI_{2008}). Navedite enačbo, ki opisuje to povezavo, in izračunajte HDI_{2008} .

- b) Letni razvoj HDI regije »Arabske države« je moč v obdobju od 1980 do 2010 približno opisati z linearno funkcijo H z enačbo $H(t) = k \cdot t + d$ pri $k, d \in \mathbb{R}$ in t v letih, pri čemer ustreza $H(0)$ vrednosti leta 1980.

Določite vrednosti parametrov k in d .

Na podlagi ustrezne slike utemeljite, v kateri regiji/v katerih regijah se je povprečno letno povišanje HDI -ja v obdobju od 1980 do 2010 najbolj ujemalo s tistim iz regije »Arabske države«.

- c) Iz ustrezne slike določite tisto številko leta, od katerega naprej izkazuje regija »Latinska Amerika in Karibik« razvojno kategorijo E_2 .

Ali od tega trenutka dalje zagotovo velja, da izkazuje približno polovica držav, ki sodijo v to regijo, razvojno kategorijo E_2 ? Utemeljite svoj odgovor.

Naloga 4

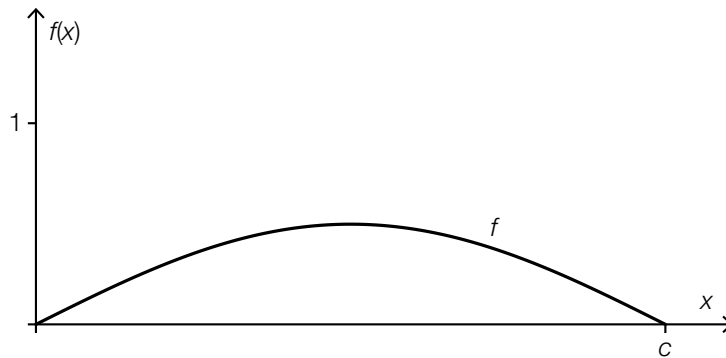
Funkcija gostote verjetnosti in porazdelitvena funkcija

Naj bo X slučajna spremenljivka, za katero je moč verjetnost, da X leži na nekem intervalu I , izračunati s pomočjo tako imenovane funkcije gostote verjetnosti f , na naslednji način:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \text{ za vse } a, b \in I \text{ pri } a \leq b$$

V tem primeru velja za porazdelitveno funkcijo F : $F(x) = P(X \leq x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$, to pomeni zlasti $F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b)$ za $a, b \in I$ in $a \leq b$.

Naslednja slika prikazuje graf funkcije gostote verjetnosti f pri $f(x) = k \cdot \sin(x)$ za $x \in [0; c]$, pri čemer velja $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ in $f(c) = 0$. Za $x \notin [0; c]$ velja: $f(x) = 0$.



Zastavitev naloge:

- a) Za dano funkcijo gostote verjetnosti f navedite funkcijsko vrednost $F(0)$ pripadajoče porazdelitvene funkcije F in utemeljite, zakaj je $F(c) = 1$.

$$F(0) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Na gornji sliki skicirajte graf pripadajoče porazdelitvene funkcije F in opišite obnašanje funkcije F glede ukrivljenosti na intervalu $[0; c]$.

- b) Navedite, s katero lastnostjo funkcije f je določena vrednost parametra k in izračunajte vrednost k .

Navedite formulo (term) za pripadajočo porazdelitveno funkcijo F na intervalu $[0; c]$.

$$F(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

c) Za neki dogodek E velja: $P(E) = 1 - P(X \leq c - a)$ za poljuben $a \in [0; c]$.

A Ta dogodek E opišite z besedami.

Za $a \leq \frac{c}{2}$ predstavite verjetnost $P(a \leq X \leq c - a)$ kot ploskev na naslednji sliki, ter na podlagi te predstavitve utemeljite povezavo $P(a \leq X \leq c - a) = 1 - 2 \cdot P(X \leq a)$.

