

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

16. Jänner 2018

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 6)

Korrekturheft

Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im entsprechenden Erlass zur Beurteilung, der auf der Website <https://ablauf.srdp.at/> abrufbar ist.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A (KA)* umfasst die unabhängig¹ erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B (KB)* umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufen 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche“ eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen“ wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend“ (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punktermittlung soll die Arbeit der Kandidatin/des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist von der Prüferin/vom Prüfer ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

| | |
|--------------|----------------|
| 44–48 Punkte | Sehr gut |
| 39–43 Punkte | Gut |
| 34–38 Punkte | Befriedigend |
| 23–33 Punkte | Genügend |
| 0–22 Punkte | Nicht genügend |

¹ Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

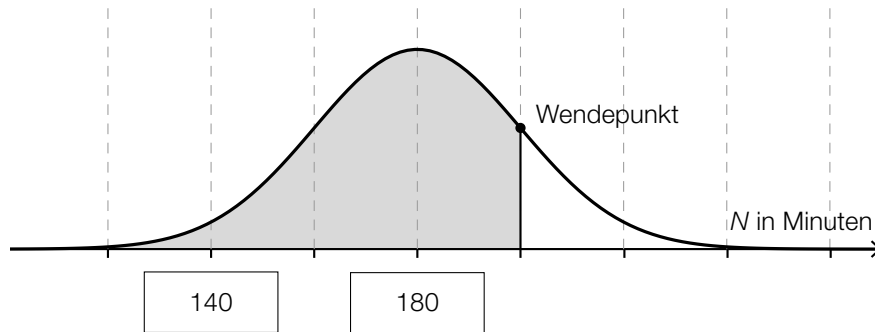
1. In der Lösungserwartung ist nur ein möglicher Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.
2. Der Lösungsschlüssel ist unter Beachtung folgender Vorgangsweisen **verbindlich** anzuwenden:
 - a. Punkte sind nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung vollständig erfüllt ist.
 - b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.
 - c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin/vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.
 - d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin/vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.
 - e. Werden von der Kandidatin/vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.
 - f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin/des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.
 - g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.
 - h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.
 - i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.

Aufgabe 1

Internet

Möglicher Lösungsweg

a)



b) $0,25 \cdot \frac{1}{8} = 0,03125$

Sie wendet etwa 3 % ihrer gesamten Internet-Nutzungsdauer für dieses Spiel auf.

c) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 3,95$ h

Standardabweichung: $s = 1,627... h$

Auch eine Berechnung der Standardabweichung als $s_{n-1} = 1,669... h$ ist als richtig zu werten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Eintragen der beiden fehlenden Zeiten (KA)

1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der gegebenen Abbildung (KB)

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes (KA)

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung (s bzw. s_{n-1}) (KA)

Aufgabe 2

Erfassen der Geschwindigkeit

Möglicher Lösungsweg

a) $s_1(0) = 0$
 $s_1(1) = 1$
 $s_1(2,5) = 3$

oder:

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$
$$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$
$$3 = a \cdot 2,5^2 + b \cdot 2,5 + c$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = \frac{2}{15}$$
$$b = \frac{13}{15}$$
$$c = 0$$

b) $v_2(t) = s_2'(t) = -t^2 + 4 \cdot t + \frac{1}{3}$
 $v_2(0) = \frac{1}{3} \neq 0$

Das Auto hatte zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls eine Geschwindigkeit ungleich 0.

$$a_2(t) = s_2''(t) = -2 \cdot t + 4$$

$$a_2(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = 2$$

An der Stelle $t_0 = 2$ gilt:

$$v_2'(2) = a_2(2) = 0$$

$$v_2''(2) = a_2'(2) = -2 < 0$$

Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 maximal ist.

Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c) $v_3(t) = 5 \cdot t + 10$ mit $1 \leq t \leq 3$

Integrieren ergibt:

$$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + C$$

Wegen $s_3(1) = 15$ gilt:

$$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + \frac{5}{2} \text{ mit } 1 \leq t \leq 3$$

t ... Zeit in s

$s_3(t)$... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten (KB)
- b) 1 × D1: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit ungleich null ist (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeit t_0 (KA)
1 × D2: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 maximal ist (KB)
Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.
- c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung (KB)

Aufgabe 3

Bevölkerungsentwicklung

Möglicher Lösungsweg

a) $N_1(t) = k \cdot t + d$

$$d = N_1(0) = 7965$$

$$k = \frac{4524 - 7965}{22} = -156,4\dots$$

$$N_1(t) = -156 \cdot t + 7965$$

Im gegebenen Zeitraum nahm die Bevölkerungszahl im Mittel pro Jahr um etwa 156 Personen ab.

b)

| | |
|---|---|
| P | C |
| Q | B |

| | |
|---|----------------------------------|
| A | $N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$ |
| B | $N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$ |
| C | $N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$ |
| D | $N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$ |

c) $N_3(t) = N_3(0) \cdot a^t$

$$4524 = 10068 \cdot a^{33} \Rightarrow a = 0,976\dots$$

$$N_3(t) = 10068 \cdot 0,976\dots^t$$

$$N_3(49) = 3069,5\dots$$

Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3070 Personen zu erwarten.

oder: $N_3(t) = N_3(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$$4524 = 10068 \cdot e^{-\lambda \cdot 33} \Rightarrow \lambda = 0,024\dots$$

$$N_3(t) = 10068 \cdot e^{-0,024\dots \cdot t}$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_1 (KA)
 1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang (KB)
- b) 1 × C: für die richtige Zuordnung (KA)
- c) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_3 (KA)
 1 × B: für das richtige Ermitteln der Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 (KB)

Aufgabe 4

Fußball

Möglicher Lösungsweg

- a) Der Ausdruck $25^{1,32} + 30^{1,32}$ wurde nicht eingeklammert.

Berechnung mithilfe der Formel:

$$25^{1,32} : (25^{1,32} + 30^{1,32}) \cdot 36 \cdot 2,753 = 43,6... \approx 44$$

Verdoppelung der Punkte nach der ersten Saisonhälfte: $19 \cdot 2 = 38$

Die Zahl, die mit der Formel berechnet wurde, ist näher an der tatsächlichen Punkteanzahl als die Verdoppelung der Punkte in der ersten Saisonhälfte.

| | |
|------------------------|-------------------------------------|
| | |
| | |
| $^{100}\sqrt{T^{132}}$ | <input checked="" type="checkbox"/> |
| | |
| | |

- b) $n = 5$ und $p = 0,8$

X ... Anzahl der verwandelten Elfmeter

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$P(X = 4) = 0,4096$$

- c) $\overline{AE}: \sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}$

$$\overline{EP}: \cos(\alpha) = \frac{\overline{AE}}{\overline{EP}} \Rightarrow \overline{EP} = \frac{\sqrt{130}}{\cos(5^\circ)} = 11,445...$$

$$\overline{EP} \approx 11,45 \text{ m}$$

$$\frac{11,44... \text{ m}}{0,4 \text{ s}} = 28,61... \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 103 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C1: für die richtige Beschreibung, welcher Fehler gemacht wurde (KA)
1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung (KA)
1 × C2: für das richtige Ankreuzen (KA)
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
- c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge \overline{EP} (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der mittleren Geschwindigkeit in km/h (KB)

Aufgabe 5

Der Genfer See

Möglicher Lösungsweg

a) $h'(t_{\max}) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t_{\max} = 5,673\dots$$

$$h(t_{\max}) = 157,72\dots$$

prozentueller Unterschied zur angegebenen maximalen Höhe:

$$\frac{157,72\dots - 140}{140} = 0,1265\dots \approx 12,7 \%$$

- b) Mit dem Ausdruck wird die gesamte Wassermenge in m^3 berechnet, die innerhalb dieser 48 Stunden den See durch den Abfluss verlassen hat.

| | |
|---|-------------------------------------|
| | |
| | |
| | |
| F ist monoton steigend im Intervall $[4; 26]$. | <input checked="" type="checkbox"/> |
| | |

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Unterschieds (KB)
b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der entsprechenden Einheit (KA)
1 × C2: für das richtige Ankreuzen (KB)

Aufgabe 6 (Teil B)

Lackproduktion

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
 $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
 $K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

I: $K(0) = 450 \Rightarrow 450 = d$

II: $K(8) = 522 \Rightarrow 522 = 512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + 450$

III: $K'(8) = 5 \Rightarrow 5 = 192 \cdot a + 16 \cdot b + c$

IV: $K''(8) = 0 \Rightarrow 0 = 48 \cdot a + 2 \cdot b$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

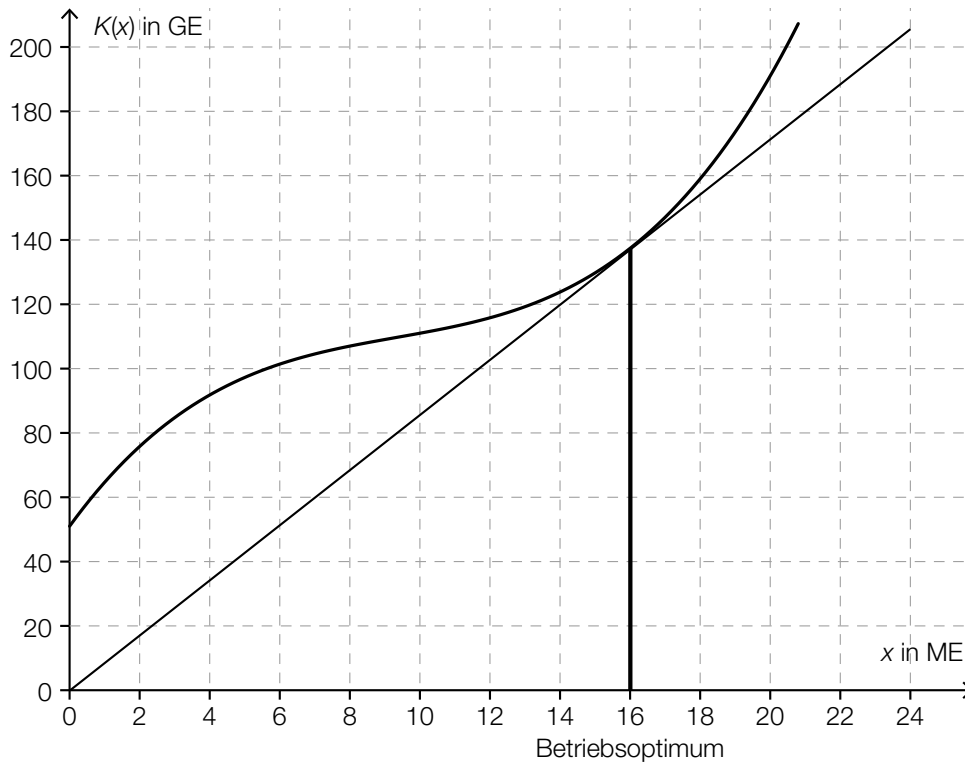
$$a = \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$b = -\frac{3}{2} = -1,5$$

$$c = 17$$

$$d = 450$$

b)



grafische Ermittlung des Betriebsoptimums: 16 ME (Toleranzbereich: [15; 17])

Ermittlung der langfristigen Preisuntergrenze: $\frac{136 \text{ GE}}{16 \text{ ME}} = 8,5 \text{ GE/ME}$ (Toleranzbereich: [8; 9])

c) Berechnung der Preisfunktion der Nachfrage mittels Technologieeinsatz:

$$p_N(x) = -0,861 \cdot x + 24,169 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

$$E(x) = p_N(x) \cdot x$$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow x = 14,037\dots$$

$$E(14,037\dots) = 169,632\dots$$

Der maximale Erlös beträgt rund 169,63 GE.

d) $G(0) = -F$

Die Fixkosten betragen 65 GE.

Wenn die Fixkosten steigen, wird der Graph der Gewinnfunktion nach unten verschoben.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Funktion K (KA)
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Funktionen K' und K'' (KA)
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten a , b , c und d (KB)
- b) 1 × A: für das richtige grafische Ermitteln des Betriebsoptimums (KA)
1 × B: für das richtige Ermitteln der langfristigen Preisuntergrenze (KA)
- c) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung mithilfe linearer Regression (KA)
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Erlöses (KB)
- d) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Fixkosten (KA)
1 × C2: für die richtige Beschreibung der Veränderung des Graphen der Gewinnfunktion (KA)

Aufgabe 7 (Teil B)

Epidemie

Möglicher Lösungsweg

- a) $N(t) = N_0 \cdot a^t$
 $N_0 = 1$
 $a = \sqrt[4]{2} = 1,18920\dots$
 $N(t) = 1 \cdot 1,1892\dots^t$ oder $N(t) = 1 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$
 t ... Zeit seit dem ersten Infektionsfall in Tagen
 $N(t)$... Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t

Eine exponentielle Zunahme ist auf lange Sicht nicht möglich, da die Anzahl der Personen, die infiziert werden können, beschränkt ist, die Funktion N aber nicht.

- b) $1200 = \frac{30000}{1 + b \cdot e^{-0,1739 \cdot 41}}$
Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $b = 29970,0\dots$

$$17000 = \frac{30000}{1 + 29970,0\dots \cdot e^{-0,1739 \cdot t}}$$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 60,8\dots$

Nach etwa 61 Tagen werden erstmals mehr als 17000 Personen infiziert sein.

- c) $I(45)$ gibt an, wie viele Personen insgesamt in den ersten 45 Tagen infiziert wurden.

Nach 60 Tagen ist die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten (Toleranzbereich: ± 5 Tage).

Dazu ermittelt man die Nullstelle der 2. Ableitung der Funktion I im dargestellten Bereich.

In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion N (KA)
1 × D: für die richtige Argumentation (KA)
- b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Parameters b (KA)
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Zeit, nach der erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein werden (KB)
- c) 1 × C1: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
1 × C2: für das richtige Ablesen der Wendestelle im Toleranzbereich $[55; 65]$ (KA)
1 × C3: für die richtige Dokumentation in Worten (KB)
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)

Aufgabe 8 (Teil B)

Liftgesellschaft

Möglicher Lösungsweg

$$a) \quad 1\,400\,000 = 90\,000 \cdot \frac{1,04^n - 1}{0,04} \cdot \frac{1}{1,04^n}$$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:

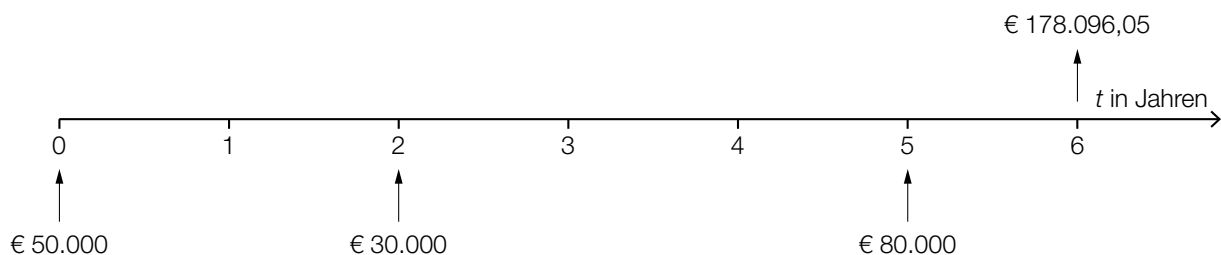
$$n = 24,81\dots$$

Die Liftgesellschaft muss 24 volle Jahresraten bezahlen.

$$\left(1\,400\,000 \cdot 1,04^5 - 90\,000 \cdot \frac{1,04^5 - 1}{0,04}\right) \cdot 1,04 = 1\,264\,478,834\dots$$

Die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres beträgt € 1.264.478,83.

- b) Der Betrag in Höhe von € 50.000 wird 2 Jahre zu 3 % p. a., dann 4 Jahre zu 3,5 % p. a. verzinst.



Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Anzahl der Vollraten (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Restschuld am Ende des 6. Jahres (KA)
- b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Zinssätze und der Verzinsungsdauer (KA)
1 × A: für das richtige Eintragen der 3 Beträge und des Gesamtwerts der Rücklage nach 6 Jahren (KA)

Aufgabe 9 (Teil B)

Verzinsung

Möglicher Lösungsweg

- a) $K_5 = 3000 \cdot 1,05^3 \cdot 1,01^2 = 3542,679\dots$
Der Kontostand nach 5 Jahren beträgt € 3.542,68.

$$1 + i = \sqrt[5]{1,05^3 \cdot 1,01^2} = 1,0338\dots \approx 1,034 \quad \text{oder:} \quad 3542,679\dots = 3000 \cdot (1 + i)^5$$
$$i = \sqrt[5]{\frac{3542,679\dots}{3000}} - 1 = 0,0338\dots$$

Der Jahreszinssatz beträgt rund 3,4 %.

- b) $2 = (1 + i)^{n_2}$
 $n_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + i)}$

Auch das Erstellen der Formel mit Logarithmen zu einer anderen Basis ist als richtig zu werten.

| | | |
|------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| i | $n_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + i)}$ | $n_2 \approx \frac{0,69}{i} + 0,35$ |
| 0,04 | 17,67... | 17,6 |

Die 0,69er-Regel ergibt also für $i = 0,04$ eine gute Näherung von n_2 .

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Kontostands nach 5 Jahren (KA)
1 × B2: für das richtige Bestimmen des Jahreszinssatzes (KA)
- b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel für n_2 (KA)
Auch das Erstellen der Formel mit Logarithmen zu einer anderen Basis ist als richtig zu werten.
1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung (KB)