

Ime:	
Razred:	



Standardizirani, kompetenčno usmerjeni  
pisni zrelostni izpit

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

9. maj 2018

# Matematika

2. del – naloge

--

# Navodila za reševanje nalog

Spoštovana kandidatka! Spoštovani kandidat!

Delovni zvezek z nalogami 2. dela, ki je pred Vami, vsebuje štiri naloge z vsakič po dvema do štirimi delnimi nalogami, pri čemer so vse delne naloge rešljive neodvisno druga od druge.

Na voljo imate 150 minut čistega časa za reševanje.

Uporabljajte pisalo v modri ali črni barvi, ki ga ni moč odstraniti z radirko. Pri konstrukcijskih nalogah lahko uporabite tudi svinčnik.

Za reševanje uporabljajte ta delovni zvezek in liste, ki so vam dani na razpolago! Svoje ime in priimek vpišite na prvi strani delovnega zvezka v za to predvideno polje in na vsak posamezni list, ki ga boste uporabili! Pri reševanju vsake posamezne delne naloge navedite njeno oznako!

Pri vrednotenju bo upoštevano vse, kar ni prečrtano. Rešitev naloge mora biti pri tem jasno razvidna. Če rešitev ni jasno razvidna, ali če so navedene različne rešitve, velja naloga za nerešeno. Svoje zapiske prečrtajte.

Pri tem terminu mature smete uporabljati dovoljeno zbirko formul, kakor tudi dovoljene elektronske pripomočke.

Oddati je potrebno delovni zvezek in vse liste, ki jih boste uporabljali.

## Vrednotenje

Vsaka naloga iz 1. dela bo ovrednotena z 0 točk ali z 1 točko, vsaka delna naloga iz 2. dela pa z 0, 1 ali 2 točkama. Z  označene zastavitve nalog bodo ovrednotene z 0 točk ali z 1 točko.

- Če bo v 1. delu pravilno rešenih vsaj 16 od 24 nalog, bo delo ocenjeno pozitivno.
- Če bo v 1. delu pravilno rešenih manj kot 16 od 24 nalog, bodo za izravnavo bistvenega območja znanja, v skladu z odredbo o ocenjevanju znanj, upoštewane z  označene naloge iz 2. dela. Če bo ob upoštevanju z  označenih nalog iz 2. dela vsaj 16 nalog pravilno rešenih, bo delo ocenjeno pozitivno. Če pa bo tudi z upoštevanjem z  označenih nalog iz 2. dela pravilno rešenih manj kot 16 nalog, bo delo ocenjeno z »nezadostno«.
- Če bo v 1. delu (ob upoštevanju izravnalnih točk ) doseženih vsaj 16 točk, se bo delo ocenjevalo po naslednjem ključu:

Genügend	zadostno	16 – 23 točk
Befriedigend	povoljno	24 – 32 točk
Gut	dobro	33 – 40 točk
Sehr gut	prav dobro	41 – 48 točk

## Pojasnilo k formatom odgovorov

Nekatere naloge imajo **proste formate odgovorov**; pri tem Vaš odgovor vpišete v delovni zvezek neposredno pod vsakokratno zastavitev naloge. Nadaljnji formati odgovorov, ki lahko pridejo v poštev pri pisnem izpitu (klavzuri), so predstavljeni kot sledi:

**Prirjevalni format:** za ta format je značilno več izjav (oz. tabel ali slik), nasproti katerim stoji več možnosti odgovorov. Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da vsaki izjavi priredite ustrezno možnost odgovora z vnosom odgovoru pripadajoče črke!

### Primer:

Dani sta dve enačbi.

$1 + 1 = 2$	A
$2 \cdot 2 = 4$	C

A	seštevanje
B	deljenje
C	množenje
D	odštevanje

### Zastavitev naloge:

Danima enačbama priredite vsakič ustrezno oznako (izmed možnosti A do D).

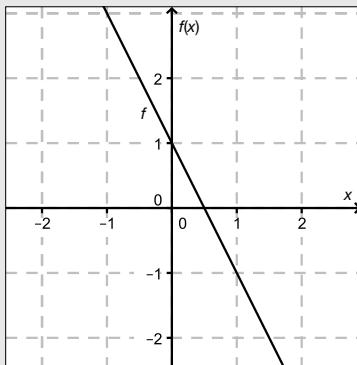
**Konstruktivski format:** Podana je naloga in zastavitev vprašanja. Naloga zahteva dopolnitev s točkami, premicami in/ali krivuljami v delovni zvezek.

**Primer:**

Dana je linearna funkcija  $f$  z  $f(x) = k \cdot x + d$ .

**Zastavitev naloge:**

V dani koordinatni sistem narišite graf linearne funkcije pri pogojih:  $k = -2$  in  $d > 0$ .



**Format multiple-choice v različici »1 izmed 6«:** Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in šest možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno možnost odgovora**. Naloga tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite edino pravilno možnost odgovora!

**Primer:**

Katera enačba je pravilna?

**Zastavitev naloge:**

S križcem označite ustrezno enačbo.

$1 + 1 = 1$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 2$	<input type="checkbox"/>
$3 + 3 = 3$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 8$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 5$	<input type="checkbox"/>
$6 + 6 = 6$	<input type="checkbox"/>

**Format multiple-choice v različici »2 izmed 5«:** Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in pet možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **dve možnosti odgovora**. Naloga tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite obe pravilni možnosti odgovora!

**Primer:**

Kateri enačbi sta pravilni?

**Zastavitev naloge:**

S križcem označite obe ustrezni enačbi.

$1 + 1 = 1$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 3$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 8$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 5$	<input type="checkbox"/>

**Format multiple-choice v različici »x izmed 5«:** Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in pet možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno, dve, tri, štiri ali pet možnosti odgovora**. V zastavitvi naloge vedno najdete zahtevo »S križcem označite veljavno(-e) izjavo(-e)/ enačbo(-e)/ ...!« Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da s križcem označite pravilno možnost/ pravilne možnosti odgovora!

**Primer:**  
Katera(-e) izmed navedenih enačb je/ so pravilna(-e)?

$1 + 1 = 2$	<input checked="" type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 6$	<input checked="" type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input type="checkbox"/>
$5 + 5 = 10$	<input checked="" type="checkbox"/>

**Zastavitev naloge:**  
S križcem označite ustrezno(-e) enačbo(-e).

**Luknjičasto besedilo:** Za ta format odgovora je značilen stavek z dvema vrzelima (luknjama), kar pomeni, da sta v besedilu naloge izpostavljeni dve mesti, ki ju je potrebno dopolniti. Za vsako vrzel (luknjo) so podane tri možnosti vnosa. Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da za vsako od vrzel (lukenj) s križcem označite obe pravilni možnosti vnosa!

**Primer:**  
Dane so 3 enačbe.

**Zastavitev naloge:**  
V naslednjem stavku dopolnite vrzeli (luknje) v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezne dele stavka tako, da nastane pravilna izjava.

Operacija, predstavljena z enačbo \_\_\_\_\_ ① \_\_\_\_\_, se imenuje izračunavanje vsote ali \_\_\_\_\_ ② \_\_\_\_\_.

①	
$1 - 1 = 0$	<input type="checkbox"/>
$1 + 1 = 2$	<input checked="" type="checkbox"/>
$1 \cdot 1 = 1$	<input type="checkbox"/>

②	
množenje (multiplikacija)	<input type="checkbox"/>
odštevanje (subtrakcija)	<input type="checkbox"/>
seštevanje (adicija)	<input checked="" type="checkbox"/>

**Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, pri katerih je potrebno označevanje s križcem:**

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v zeleni okvirček.

$1 + 1 = 3$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 5$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input type="checkbox"/>
$5 + 5 = 9$	<input checked="" type="checkbox"/>

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor » $5 + 5 = 9$ «, nato pa spremenjen na » $2 + 2 = 4$ «.

**Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:**

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite zeleni prebarvani okvirček.

$1 + 1 = 3$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 5$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 9$	<input type="checkbox"/>

Tukaj je bil odgovor » $2 + 2 = 4$ « najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

Če imate še kakšno vprašanje, se prosimo obrnite na svojo učiteljico/ svojega učitelja!

**Veliko uspeha pri reševanju!**

# Naloga 1

## Lastnosti polinomske funkcije tretje stopnje

Dana je polinomska funkcija tretje stopnje  $f$  s funkcijsko enačbo  $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$ , pri čemer so koeficienti  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

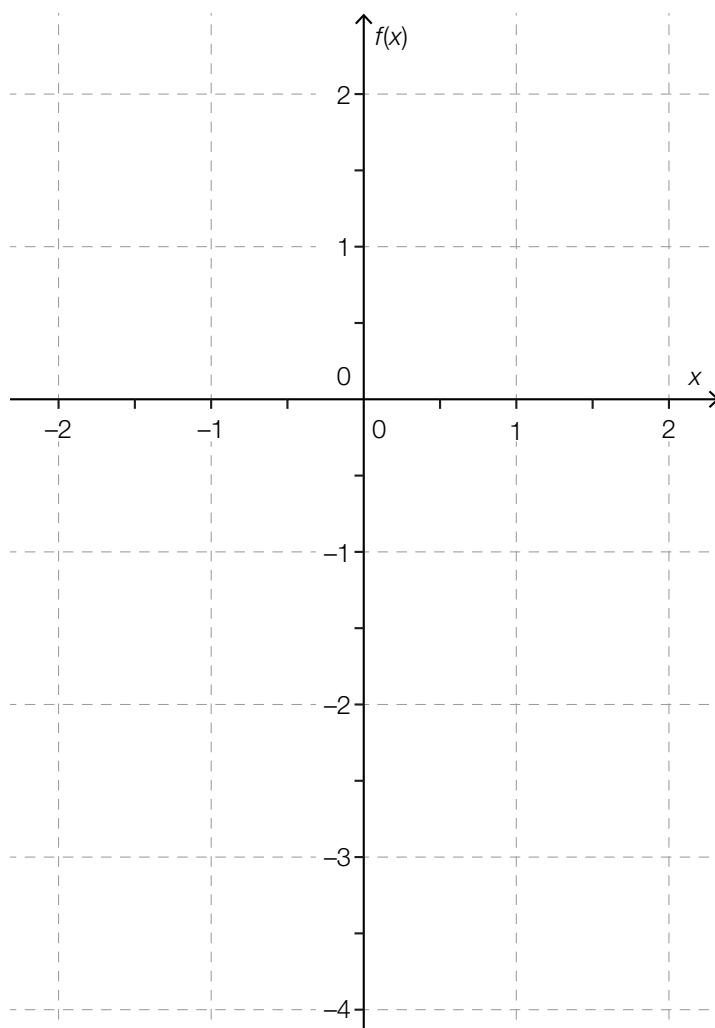
Zastavitev naloge:

a) Utemeljite, zakaj ima funkcija  $f$  natanko tri različne realne ničle, če imata koeficienta  $a$  in  $b$  različna predznaka.

A Smerni koeficient (vzpon) tangente na graf funkcije  $f$  na mestu  $x = 0$  ustreza vrednosti koeficienta  $b$ . Utemeljite zakaj je ta izjava pravilna.

b) Navedite odnos med koeficienti  $a$  in  $b$ , tako da bo veljalo:  $\int_0^1 f(x) dx = 0$

Utemeljite zakaj iz predpostavke  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  sledi, da ima  $f$  eno ničlo na intervalu  $(0; 1)$  in v spodnjem koordinatnem sistemu skicirajte možen graf ene take funkcije  $f$ .



# Naloga 2

## Hmelj

Hmelj je hitro rastoča plezalka. Modelna funkcija  $h: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  pri  $h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{k \cdot t}}$  za  $a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^-$  približno podaja višino rastline neke določene vrste hmelja v trenutku  $t$ , pri čemer se  $h(t)$  navaja v metrih in  $t$  v tednih.

V naslednji preglednici so povzete izmerjene višine neke hmeljeve rastline od začetka aprila ( $t = 0$ ).

čas (v tednih)	0	2	4	6	8	10	12
višina (v m)	0,6	1,2	2,3	4,2	5,9	7,0	7,6

Na osnovi te preglednice merjenih vrednot so bile za modelno funkcijo  $h$  določene naslednje vrednosti parametrov:  $a = 8$ ,  $b = 15$  in  $k = -0,46$ .

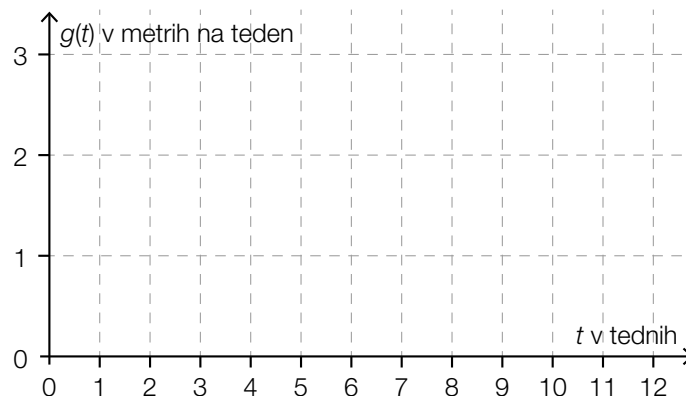
### Zastavitev naloge:

- a)  Ob uporabi modelne funkcije  $h$  navedite izraz, s katerim je moč izračunati, za koliko metrov je hmeljeva rastlina zrasla v časovnem intervalu  $[0; t_1]$ .

S pomočjo vašega izraza izračunajte ob uporabi modelne funkcije  $h$ , koliko je rastlina zrastle v prvih 10 tednih, in navedite odstotno odstopanje od dejansko izmerjene vrednosti.

- b) Če modeliramo rast rastline s pomočjo funkcije  $h$ , obstaja nek časovni trenutek  $t_2$ , ob katerem le-ta najhitreje raste. Navedite enačbo, s katero je ta časovni trenutek moč izračunati, in določite ta časovni trenutek.

Izračunajte pripadajočo maksimalno hitrost rasti in v naslednjem koordinatnem sistemu, pri upoštevanju maksimuma, ki ste ga izračunali, skicirajte potek grafa tiste funkcije  $g$ , ki na osnovi modelne funkcije  $h$  opisuje hitrost rasti hmeljeve rastline v odvisnosti od  $t$ .



- c) Določite linearno funkcijo  $h_1$ , katere vrednosti se pri  $t = 0$  in  $t = 12$  ujemajo z izmerjenimi višinami iz podane preglednice, in interpretirajte vzpon te linearne funkcije v danem kontekstu.

$$h_1(t) = \underline{\hspace{15em}}$$

Na podlagi poteka grafov funkcij  $h$  in  $h_1$  utemeljite, zakaj obstajata najmanj dva časovna trenutka, v katerih ima hitrost rasti rastline enako vrednost kot vzpon (smerni koeficient) funkcije  $h_1$ .

- d) Za naraščajoče  $t$  se  $h(t)$  približuje neki vrednosti, ki jo označimo kot  $h_{\max}$ . Na podlagi dane funkcijske enačbe modelne funkcije  $h$  dokažite računsko, da parameter  $k$  (pri  $k < 0$ ) nima vpliva na  $h_{\max}$ , in navedite  $h_{\max}$ .

Ugodne vremenske razmere lahko vodijo do tega, da hmeljeva rastlina raste hitreje in višje, to pomeni, da se prej približa večji vrednosti  $h_{\max}$ .

Za takšno rast rastline navedite, kako morata biti spremenjena  $a$  in  $k$ .

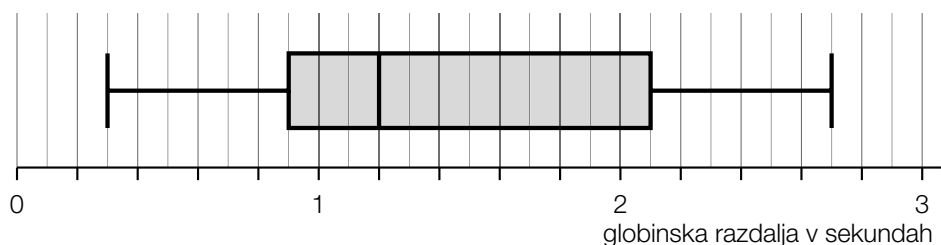
# Naloga 3

## Merjenje varnostne razdalje

V okviru policijskih nadzornih ukrepov v javnem prometu, se izvajajo meritve varnostne razdalje. V nadaljevanju opisuje pojem *razdalja* dolžino daljice in pojem *globinska razdalja* časovni razpon.

Če znaša razdalja med zadnjim koncem spredaj vozečega vozila in prednjim koncem zadaj vozečega vozila  $\Delta s$  metrov, potem pod globinsko razdaljo razumemo tisti čas  $t$  v sekundah, v katerem zadaj vožeče vozilo prevozi pot dolžine  $\Delta s$ .

V nadaljevanju so v diagramu škatla z brki (boxplot) predstavljene globinske razdalje, ki so bile ugotovljene v okviru neke kontrole pri 1 000 vozilih. Vsa preverjana vozila so vozila s hitrostjo ca. 130 km/h.



Zastavitev naloge:

- a)  A Navedite prvi kvartil  $q_1$  in tretji kvartil  $q_3$  globinskih razdalj in razložite območje od  $q_1$  do  $q_3$  v danem kontekstu.

Po empiričnih vrednostih nekega avstrijskega kluba avtomobilskih voznikov upošteva približno tri četrtine voznikov/-c motornih vozil, pri povprečni hitrosti ca. 130 km/h, razdaljo vsaj 30 metrov do spredaj vozečega vozila. Navedite, če podatki, navedeni v diagramu škatla z brki, te empirične vrednosti približno potrjujejo ali ne, ter utemeljite svojo odločitev.

- b) Po običajnem uveljavljenem pravilu se na avtocestah v splošnem priporoča globinska razdalja najmanj dveh sekund. Nekdo zatrjuje, da je iz predstavljenega diagrama škatla z brki moč razbrati, da je vsaj 20 % voznikov/-c upoštevalo to globinsko razdaljo. Navedite večji odstotni delež, ki ga je moč z gotovostjo razbrati iz diagrama škatla z brki, in utemeljite svojo izbiro.

Odstotni delež, ki ste ga ugotovili, vzemite kot verjetnost, da je priporočena globinska razdalja upoštevana.

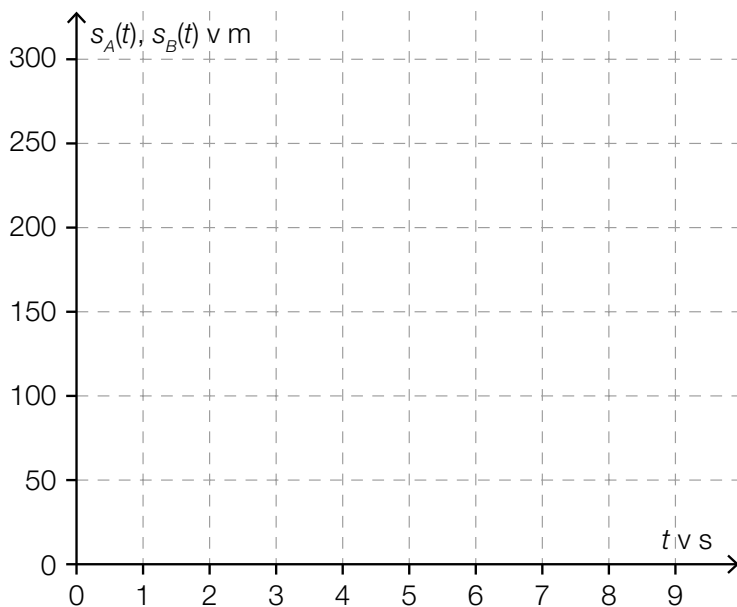
Navedite, kako visoka je verjetnost, da je bila pri desetih naključno in med seboj neodvisno izbranih meritvah te kontrole priporočena globinska razdalja najmanj dveh sekund upoštevana vsaj šestkrat.



- c) Pri neki drugi meritvi varnostne razdalje se kontrolirano vozilo na zadnjih 300 metrih pred meritvijo dodatno filmsko posname, zato da se meritev ne izkrivi, če se pred kontrolirano vozilo vrine drugo vozilo.

Vozilo  $A$  vozi med potekom meritve s konstantno hitrostjo in potrebuje za filmsko posnetih 300 metrov čas devetih sekund. Opravljeno pot  $s_A(t)$  v odvisnosti od časa  $t$  predstavite v spodnjem diagramu poti v odvisnosti od časa ( $s_A(t)$  v metrih,  $t$  v sekundah) in navedite s kakšno hitrostjo v km/h je vozilo na poti.

Tudi vozilo  $B$  prevozi teh 300 metrov v devetih sekundah, vendar pri tem kontinuirano zmanjšuje svojo hitrost. Izhajajoč iz izhodišča skicirajte možen potek grafa ustrezne funkcije poti v odvisnosti od časa  $s_B$ , v spodnjem diagramu poti v odvisnosti od časa.



# Naloga 4

## Bitcoin

Bitcoin (oznaka valute: BTC) je digitalna umetna valuta (kriptovaluta). Tržna vrednost bitcoina se oblikuje na podlagi ponudbe in povpraševanja.

Uporabniki/-ce bitcoina so v tej nalogi poimenovani kot bitcoin-user.

Naslednja slika prikazuje bitcoin-evro-tečaj od 11. marca 2015 do 11. marca 2016. Leva skala pri tem prikazuje absolutno vrednost enega bitcoina v evrih, desna skala pa prikazuje spremembo v odstotkih glede na 11. marec 2015.

bitcoin-evro-tečaj (BTC – EUR)



Vir podatkov: <http://www.finanzen.net/devisen/bitcoin-euro-kurs> [11.03.2017] (prirejeno).

### Zastavitev naloge:

- a) Navedite v katerem od mesecev od aprila 2015 do decembra 2015 je bitcoin-evro-tečaj, vsakič od začetka meseca do konca meseca, absolutno najmočnejše padel in navedite ta padec tečaja v evrih.

meseč: \_\_\_\_\_

padec tečaja: \_\_\_\_\_

Naj bo  $K_1$  bitcoin-evro-tečaj na začetku dotičnega meseca,  $K_2$  bitcoin-evro-tečaj na koncu dotičnega meseca, ter  $AT$  število dni dotičnega meseca.

Izračunajte približno vrednost izraza  $\frac{K_2 - K_1}{AT}$  in interpretirajte rezultat v danem kontekstu.

- b) Začetek januarja 2016 je bilo v obtoku ca. 15. milijonov bitcoinov. Količina v obtoku nahajajočih se bitcoinov  $t$  let po letu 2009, je približno  $f(t) = 21 \cdot 10^6 - 21 \cdot 10^6 \cdot e^{-0,18 \cdot t}$ . S tem je  $f(0)$  količina v obtoku nahajajočih se bitcoinov ob začetku januarja 2009.

Določite in interpretirajte relativno (odstotno) spremembo v obtoku nahajajočih se bitcoinov v časovnem intervalu  $[7; 8]$ .

Navedite enačbo, s katero je moč izračunati tisti časovni trenutek, od katerega dalje bo lahko v obtok dano samo še en milijon bitcoinov in določite ta časovni trenutek.

- c) Neka raziskava o demografiji bitcoin-userjev je pokazala, da je po svetu 88 % bitcoin-userjev moškega spola. Ugotoviti želimo, kako visok je ta odstotek v Avstriji. V ta namen je bilo anketiranih večje število oseb. Anketa je pokazala, da je bilo 171 izmed anketiranih oseb bitcoin-userjev, in od teh 171 oseb je bilo 138 moških.

Na osnovi teh podatkov navedite 95 %-ni simetrični interval zaupanja za neznani delež moških bitcoin-userjev med vsemi bitcoin-userji v Avstriji.

Navedite, najmanj kakšna stopnja zaupanja (gotovost) mora biti privzeta za izračun takega intervala, da bo delež 88 %, ki je ugotovljen po svetu, v tem intervalu zajet.

