Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

junij 2018

Matematika

Kompenzacijski izpit 6

Navedbe za **izpraševalce / izpraševalke**

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence *(Grundkompetenzen)*, pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju *(Kommunikationsfähigkeit)*.

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko *(Grundkompetenzpunkt)*, z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko *(Leitfragenpunkt)*. Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		najmanjše število doseženih točk
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

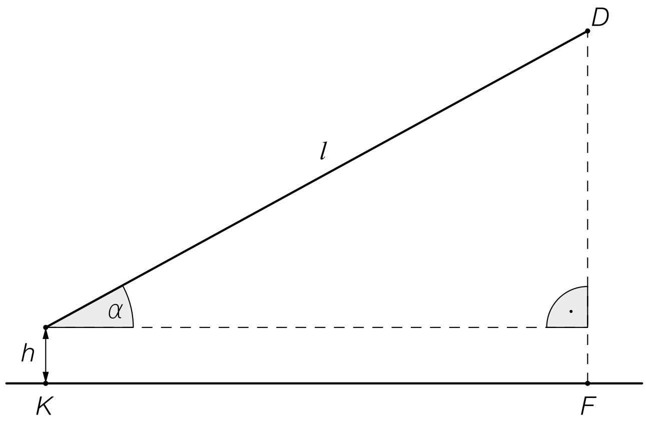
Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Spuščanje zmaja

Neki otrok spušča zmaja D v zrak. Položaja otroka (K) in zmaja (D) sta v določenem časovnem trenutku modelno predstavljena na naslednji sliki.



Stojišče otroka K in točka F ležita na vodoravni ravnini. Otrok drži zmaja na višini $h = 1{,}5$ m nad tlemi, dolžina napete zmajeve vrvice znaša $l = 50$ m.

Zastavitev naloge:

Navedite formulo za izračun višine $\overline{FD}$ zmaja nad ravnino (v metrih) v odvisnosti od kota α.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite enačbo, s katero je moč izračunati tisti kot α, za katerega je vodoravna oddaljenost $\overline{KF}$ enaka višini zmaja $\overline{FD}$, ter določite α.

Rešitev naloge 1

Spuščanje zmaja

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$\overline{FD} = 50 \cdot \sin(\alpha) + 1{,}5$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je navedena pravilna formula.
Ekvivalentne formule je vrednotiti kot pravilne.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$\overline{KF} = \overline{FD} \quad \Rightarrow \quad 50 \cdot \cos(\alpha) = 50 \cdot \sin(\alpha) + 1{,}5$
$\alpha \approx 43{,}78°$

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko sta navedena tako pravilna enačba za izračun in naveden tudi pravilen α.
Toleranční interval: [43°; 44°]

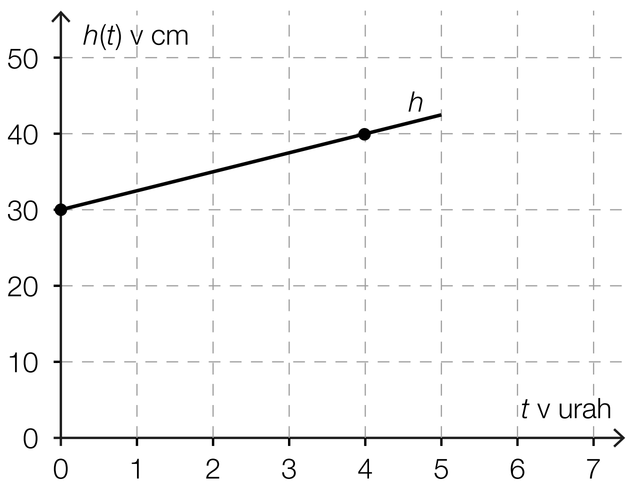
Naloga 2

Sneženje

Višino snežne odeje med peturnim sneženjem lahko modeliramo s pomočjo neke linearne funkcije h. Pri tem je $h(t)$ višina snežne odeje v cm in t čas v urah pri $0 \leq t \leq 5$.

Zastavitev naloge:

Spodaj predstavljeni graf ponazarja višino snežne odeje med tem peturnim sneženjem. Koordinate vrisanih točk so celoštevilske.



S funkcijsko enačbo opišite odvisnost višine snežne odeje h od časa t in navedite pomen številskih vrednosti, ki nastopajo v tej enačbi.

Nadaljevalno vprašanje:

Za neko funkcijo h_1 navedite vse pogoje, ki morajo biti izpolnjeni, da bo s h_1 opisano premo sorazmerje med višino snežne odeje $h_1(t)$ (v cm) in časom t (v urah).

Navedite funkcijsko enačbo tiste funkcije h_1, ki opisuje eno tako premo sorazmerje, če je snežna odeja po peturnem sneženju visoka 20 cm.

Rešitev naloge 2

Sneženje

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$h(t) = 30 + 2{,}5 \cdot t$

Ob začetku opazovanja ($t = 0$) znaša višina snežne odeje 30 cm.
Na uro se višina snežne odeje poveča za 2,5 cm.

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko so (smiselno) pravilno navedeni ustrezna funkcijska enačba in pomen številskih vrednosti.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Ob začetku opazovanja (pri $t = 0$) mora biti višina snežne odeje nič in (absolutni) prirastek višine na časovno enoto mora biti konstanten.

$h_1(t) = 4 \cdot t$

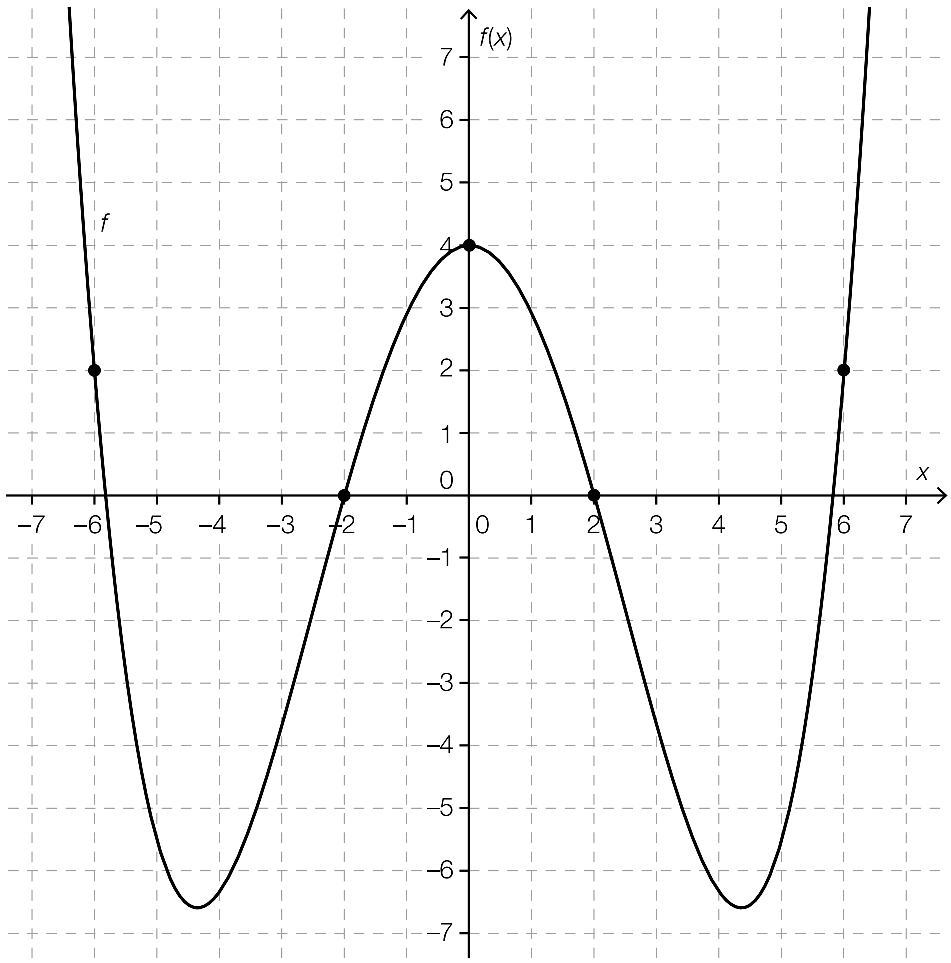
Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko so (smiselno) pravilno navedeni tako oba pogoja, ki sta navedena pri pričakovani rešitvi, kot tudi funkcijska enačba.

Naloga 3

Polinomska funkcija četrte stopnje

Na naslednji sliki je predstavljen graf neke polinomske funkcije f četrte stopnje s funkcijsko enačbo $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ pri $a, b, c \in \mathbb{R}$. Koordinate vrisanih točk so celoštevilske.



Zastavitev naloge:

Določite parametre a, b in c funkcije f. Navedite tiste intervale, v katerih velja $f'(x) > 0$, in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite en $k \in \mathbb{R}$ pri $k > 2$ tako, da bo naslednja enačba splošno veljavna, ter pojasnite svoj postopek.

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x = f'(0)$$

Obstoja še ena nadaljnja vrednost $h \in \mathbb{R}$, $0 \le h \le 2$, za katero je enačba $\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{h} f(x)\,\mathrm{d}x = f'(0)$ izpolnjena. Izračunajte to vrednost.

Rešitev naloge 3

Polinomska funkcija četrte stopnje

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$a \approx 0{,}0295 \quad b \approx -1{,}1181 \quad c = 4$
Intervala: $(-4{,}35;\ 0)$ in $(4{,}35;\ \infty)$

Možna pot reševanja:

Na nekem intervalu $(x_1;\ x_2)$ velja $f'(x) > 0$, če je pri vsakem $x \in (x_1;\ x_2)$ tangenta na graf funkcije f naraščajoča. Z določitvijo mest ekstremov je moč ugotoviti meje teh intervalov.

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko so pravilno navedeni tako parametri a, b in c kot tudi oba intervala in pojasnjen pravilen postopek reševanja.
Kot pravilni se vrednotijo tudi polodprti ali zaprti intervali, kakor tudi druge pravilne oblike zapisa.
Tolerančna intervala za obe spodnji meji intervalov: $[-4{,}4;\ -4{,}3]$ oz. $[4{,}3;\ 4{,}4]$

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Za $k = 3$ je enačba splošno veljavna.

Možna pot reševanja:

Velja: $f'(0) = 0$, ker je $x = 0$ mesto lokalnega maksimuma. Da bo tudi razlika določenih integralov znašala 0, morata ležati obe od nič različni meji integralov (pri pogoju $k > 2$) simetrično na izhodišče (ker je funkcija f soda funkcija oz. je graf funkcije simetričen glede na navpično os).

Tudi za $h \approx 0{,}91$ je enačba splošno veljavna.

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno naveden k, pojasnjen pravilen postopek in hkrati pravilno izračunan h.

Naloga 4

Število prebivalstva

Število prebivalstva neke države v letu t v nadaljevanju označimo z $B(t)$.

Zastavitev naloge:

Interpretirajte obe naslednji enačbi glede na število prebivalstva te države.

- $\frac{B(2015)}{B(1950)} = 2$
- $\frac{B(2015) - B(2000)}{B(2000)} = 0{,}1$

Nadaljevalno vprašanje:

V danem kontekstu interpretirajte enačbo $\frac{B(2015) - B(2000)}{15} = 100\,000$.
Na podlagi danih enačb ugotovite število prebivalstva te države v letu 2015 in pojasnite svoj postopek.

Rešitev naloge 4

Število prebivalstva

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možne interpretacije:
- Število prebivalstva države je 2015 dvakrat tako visoko kot 1950.
- Število prebivalstva države je 2015 za 10 % višje kot 2000.

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko sta obe enačbi (smiselno) pravilno interpretirani.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Število prebivalstva države je v času od 2000 do 2015 narastlo za povprečno 100 000 prebivalcev/-k na leto.

Število prebivalstva v letu 2015 znaša 16,5 milijonov.

Možna pot reševanja:
V 15 letih je s tem število prebivalstva narastlo za 1,5 milijona.
Ker to po enačbi $\frac{B(2015) - B(2000)}{B(2000)} = 0{,}1$ ustreza 10 %-nemu prirastku, mora veljati
B(2000) = 15 milijonov.
$B(2015) = B(2000) + 1{,}5 = 16{,}5$

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno interpretirana enačba v kontekstu, kakor tudi pravilno določeno število prebivalstva v letu 2015 in pojasnjen pravilen postopek.

Naloga 5

Žrebanje popusta

Neka trgovina organizira igro na srečo. Cilj te igre na srečo je, s »pošteno« igralno kocko s šestimi ploskvami, vreči čim višje število. (Kocka je »poštena«, če je verjetnost, da je po metu obrnjena navzgor, za vse mejne ploskve enako velika.)
Če s kocko vržemo števila od 1 do 5, potem ustreza vrženo število popustu v odstotkih.
Če nekdo prvič vrže šestico, sme vreči še enkrat in vsota vrženih števil obeh metov znese popust v odstotkih.

Zastavitev naloge:

Določite verjetnost *P*, da dobi stranka popust 10 %.
Pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Slučajna spremenljivka *X* opisuje popust v odstotkih, ki ga lahko dobi stranka.

Navedite vse možne vrednosti, skupaj s pripadajočimi verjetnostmi, ki jih lahko zavzame slučajna spremenljivka *X*.

Izračunajte pričakovano vrednost $E(X)$ slučajne spremenljivke *X* in pojasnite izračunano vrednost v danem kontekstu.

Rešitev naloge 5

Žrebanje popusta

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Stranka dobi 10 % popusta, če pri prvem metu kocke vrže šestico in pri drugem štirico.

$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278 = 2{,}78\ \%$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno navedena verjetnost in pojasnjen pravilen postopek.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Vrednosti slučajne spremenljivke:
1, 2, 3, 4, 5 z verjetnostjo vsakič $\frac{1}{6} \approx 0{,}1667 = 16{,}67\ \%$
7, 8, 9, 10, 11, 12 z verjetnostjo vsakič $\frac{1}{36} \approx 0{,}0278 = 2{,}78\ \%$

$E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot \frac{1}{6} + (7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) \cdot \frac{1}{36} \approx 4{,}08$

V povprečju je pričakovati 4 % popusta.

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko so vrednosti, ki jih lahko zavzame slučajna spremenljivka in pripadajoče verjetnosti pravilno navedene. Nadalje mora biti prav določena in pravilno navedena pričakovana vrednost.