Ime:	
Razred/Letnik:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

20. september 2018

Uporabna matematika

TAK/HAK

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za reševanje nalog

Draga kandidatka! Dragi kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred vami, vsebuje 5 nalog v delu A in 3 naloge v delu B z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge lahko obdelujete neodvisno drugo od druge. Na voljo imate skupno 270 minut čistega delovnega časa za del A in del B.

Pri reševanju uporabljajte pisalo v modri ali črni barvi, ki ga ni moč odstraniti z radirko. Pri konstrukcijskih nalogah lahko uporabite tudi svinčnik.

Za reševanje uporabljajte izključno zvezek z nalogami in liste za odgovore, ki so vam dani na razpolago. Vpišite svoje ime v za to predvideno polje na prvi strani zvezka z nalogami in na vsak list z odgovori. Pri odgovarjanju vsake delne naloge navedite oznako le-te (npr. 3c ali 3d1).

V vrednotenje bo vključeno vse, kar ni prečrtano. Zabeležke prečrtajte.

Uporaba s strani *»Schulbuchaktion«* potrjenih zvezkov formul oz. zbirke formul za SRDP iz uporabne matematike in elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije) je dovoljena, če ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, itraneta, bluetooth, mobilnega omrežja itd.) in v elektronski pripomoček niso implementirani lastni podatki. Priročniki za uporabo elektronskih pripomočkov so dopustni v originalni tiskani obliki ali v elektronski pripomoček integrirani obliki.

Oddati je potrebno zvezek z nalogami in vse liste z odgovori, ki jih boste uporabljali.

Smernice za reševanje

- Vsak izračun je potrebno izvesti z razumljivim računskim nastavkom in razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljene funkcije tehnologije).
- Spremenljivke, ki jih izberete sami, je potrebno pojasniti in po potrebi navesti enote.
- Rezultate je potrebno nedvoumno poudariti.
- Rezultate je potrebno navesti z ustreznimi enotami, če je to v navodilu za postopek izreceno zahtevano.
- Če so kot rešitve izdelani diagrami ali skice, je potrebno osi opisati (skalirati) ter označiti.
- Če so izdelane geometrijske skice, je potrebno dele, ki so pomembni za rešitev, označiti.
- Izogibajte se prezgodnjega zaokroževanja.
- Priložite morebitne računalniške izpise rešitve, opremljene z vašim imenom.
- Če je naloga izračunana večkrat, je potrebno vse poti reševanja razen ene, prečrtati.

Za vrednotenje velja naslednji ključ:

44–49 točk	»Sehr gut« / prav dobro
39–43 točk	»Gut« / dobro
33–38 točk	»Befriedigend« / povoljno / zadovoljivo
23–32 točk	»Genügend« / zadostno
0–22 točk	»Nicht genügend« / nezadostno

Razlaga formatov odgovorov

Delne naloge lahko vsebujejo naslednje formate odgovorov: *odprti format odgovora, polodprti format odgovora, konstrukcijski format, prireditveni format* in *multiple-choice-format v različici »1 izmed 5«.*

Odprti format odgovora: pri odprtem formatu odgovora lahko poteka reševanje na zelo različne načine, npr. z izračunom ali na grafični način (z izdelavo grafikona).

Polodprti format odgovora: pri polodprtem formatu odgovora je potrebno pravilni odgovor vstaviti v vnaprej podano formulo, funkcijo itd.

Primer:

Dan je pravokotnik s stranicama a in b.

– Nastavite formulo za izračun ploščine A tega pravokotnika.

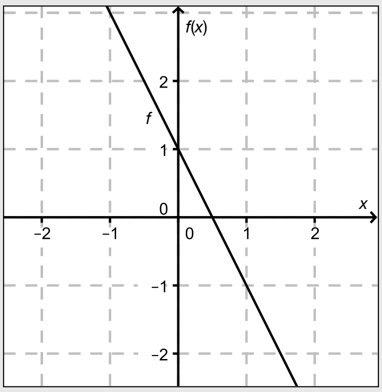
$A = a \cdot b$

Konstrukcijski format: Dan je diagram, grafikon ali slika. Zastavitev naloge zahteva dopolnitev s točkami in/ali premicami in/ali krivuljami in/ali vpisovanjem vrednosti oz. označevanjem koordinatnih osi na diagramu, v grafikonu ali na sliki.

Primer:

Dana je linearna funkcija f pri $f(x) = k \cdot x + d$.

– V naslednji koordinatni sistem narišite graf linearne funkcije pri $k = -2$ in $d > 0$.



Prireditveni format: Za ta format je značilno, da je podanih več izjav (oz. tabel ali slik), nasproti katerih stoji več možnosti odgovorov. Nalogo tega formata pravilno rešite tako, da z vstavljanjem **ustreznih črk** dotičnim izjavam priredite pravilne možnosti odgovorov.

Primer:

– Dvem enačbam priredite vsakič ustrezno oznako (izmed A do D).

1 + 1 = 2	A
2 · 2 = 4	C

A	seštevanje
B	deljenje
C	množenje
D	odštevanje

Multiple-choice-format v različici »1 izmed 5«: Za ta format je značilna ena zastavitev vprašanja in 5 možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno možnost odgovora.** Nalogo tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite pravilno možnost odgovora.

Primer:

– S križcem označite ustrezno enačbo.

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 3	☐
4 + 5 = 8	☐
5 + 5 = 5	☐

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah za označevanje s križcem:
1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato križcem označite želeni okvirček.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tukaj je bil najprej izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

Tako izberete odgovor, ki ste ga že prebarvali:
1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Obkrožite želeni prebarvani okvirček.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Tukaj je bil najprej odgovor »2 + 2 = 4« prebarvan in nato ponovno izbran.

Veliko uspeha!

Naloga 1

Potovanja s pavšalno ceno

Neka turistična agencija posreduje mesta za potovanja s pavšalno ceno na Hrvaško.

a) Privzema se, da posredovana mesta, neodvisno drug od drugega, z verjetnostjo 5 % niso izkoriščena. Posredovanih je vseh 100 mest, ki so na voljo.

1) Izračunajte verjetnost, da največ 4 posredovana mesta niso bila izkoriščena.

[1 točka]

2) V dani vsebinski povezavi opišite možen dogodek *E*, čigar verjetnost je moč izračunati na naslednji način:

$\binom{100}{5} \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^{95}$ *[1 točka]*

b) Privzema se, da posredovana mesta, neodvisno drug od drugega, z verjetnostjo 5 % niso izkoriščena. Posredovanih je 102 mest, čeprav je na voljo le 100 mest.

1) Izračunajte verjetnost, da število mest pri teh predpostavkah ne zadošča. *[1 točka]*

c) Za vsak termin potovanja je na voljo 100 mest.
Za vsako rezervirano mesto dobi potovalna agencija dobiček *a* evrov.
Z vsakim ne-rezerviranim mestom naredi agencija 120 evrov izgube.
Skupni dobiček dobimo tako, da od dobička iz vseh rezerviranih mest odštejemo izgubo od vseh ne-rezerviranih mest.

Pri nekem določenem potovalnem terminu je bilo rezerviranih samo *x* mest. Skupni dobiček za ta termin znaša *G* evrov.

1) Nastavite formulo za izračun *x* iz *a* in *G*.

$x =$ ____ *[1 točka]*

Naloga 2

Suvanje krogle

Suvanje krogle je disciplina na poletnih olimpijskih igrah.
Kovinsko kroglo je treba suniti iz kroga, čim dlje v danem območju pristanka meta.

a) Leta 1948 je bil pri moških postavljen novi svetovni rekord z dolžino 17,68 m.

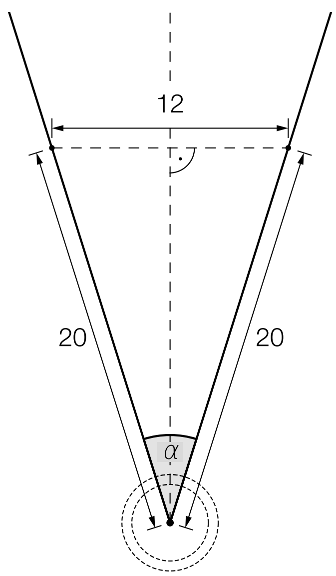
Neko pravilo čez palec pravi, da se je od leta 1948 svetovni rekord pri moških na vsakih 2,5 let izboljšal za 34 cm. Po tem pravilu čez palec naj bi bila dolžina svetovnega rekorda (v metrih), v odvisnosti od časa t (v letih), opisana z linearno funkcijo f.

1) Nastavite enačbo funkcije f. Izberite $t = 0$ za leto 1948. *[1 točka]*

Leta 1988 je znašal svetovni rekord pri moških 23,06 m.

2) Za leto 1988 določite odstopanje funkcijske vrednosti funkcije f od te dolžine svetovnega rekorda. *[1 točka]*

b) Na naslednji sliki je v pogledu od zgoraj predstavljeno območje pristanka meta (vse navedbe v metrih).



1) Izračunajte kot α, ki je označen na gornji sliki. *[1 točka]*

2) Na gornji sliki označite tisto daljico, katere dolžino je moč izračunati z naslednjim izrazom:
$$\frac{6}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$
[1 točka]

c) Krivuljo poti neke sunjene krogle je moč približno opisati z grafom kvadratne funkcije h:

$h(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2$ pri $x \geq 0$

x ... vodoravna oddaljenost krogle od mesta iz katerega je bila sunjena, v m
$h(x)$ ... višina krogle nad tlemi, pri vodoravni oddaljenosti x v m

1) Navedite, na kateri višini je bila krogla sunjena. *[1 točka]*

2) Določite, na kateri vodoravni oddaljenosti od mesta, iz katerega je bila krogla sunjena, se krogla dotakne tal. *[1 točka]*

d) Za krogle, ki se uporabljajo pri moških, veljata naslednja normativa:

- Masa znaša 7 257 g.
- Polmer krogle leži med 11 cm in 13 cm.

Zlitina medenine in železa ima gostoto 8,2 g/cm³.
Masa m je produkt prostornine V in gostote ϱ, torej $m = V \cdot \varrho$.

1) Dokazljivo preverite, če je moč iz te zlitine medenine in železa izdelati kroglo, ki izpolnjuje dana normativa. *[1 točka]*

Naloga 3

Cepljenje in osvežitev zaščite

A pomočjo koncentracije protiteles v krvi se določa, če po nekem cepljenju obstaja zadostna zaščita. Ta koncentracija je pogosto označena kot koncentracija zaščitnih protiteles in podana v »mednarodnih enotah na liter« (»*Internationale Einheit pro Liter*«: IE/L).

a) Pri Anni je bila neposredno po nekem cepljenju izmerjena koncentracija zaščitnih protiteles 110 IE/L. Koncentracija zaščitnih protiteles se kontinuirano manjša in pri Anni upada za 20 % na leto, glede na vsakokratno leto poprej.

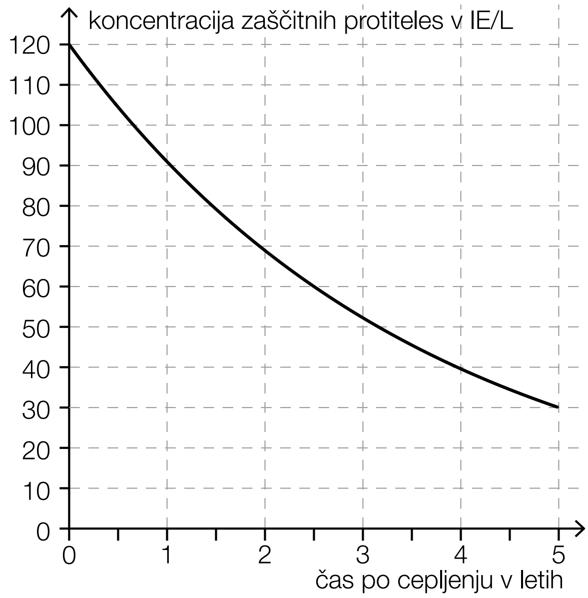
Koncentracija zaščitnih protiteles v Annini krvi (v IE/L) naj bo v odvisnosti od časa t (v letih) opisana s funkcijo A.

1) Nastavite enačbo funkcije A. Izberite $t = 0$ za časovni trenutek meritve. *[1 točka]*

Od koncentracije zaščitnih protiteles 10 IE/L zaščite po cepljenju več ni.

2) Izračunajte, po koliko časa pri Anni ni več zaščite po cepljenju. *[1 točka]*

b) Naslednja slika približno prikazuje Bernhardov časovni potek koncentracije zaščitnih protiteles po nekem cepljenju.



1) Odčitajte razpolovni čas $T_{1/2}$.

$T_{1/2}$ = ______________ let [1 točka]

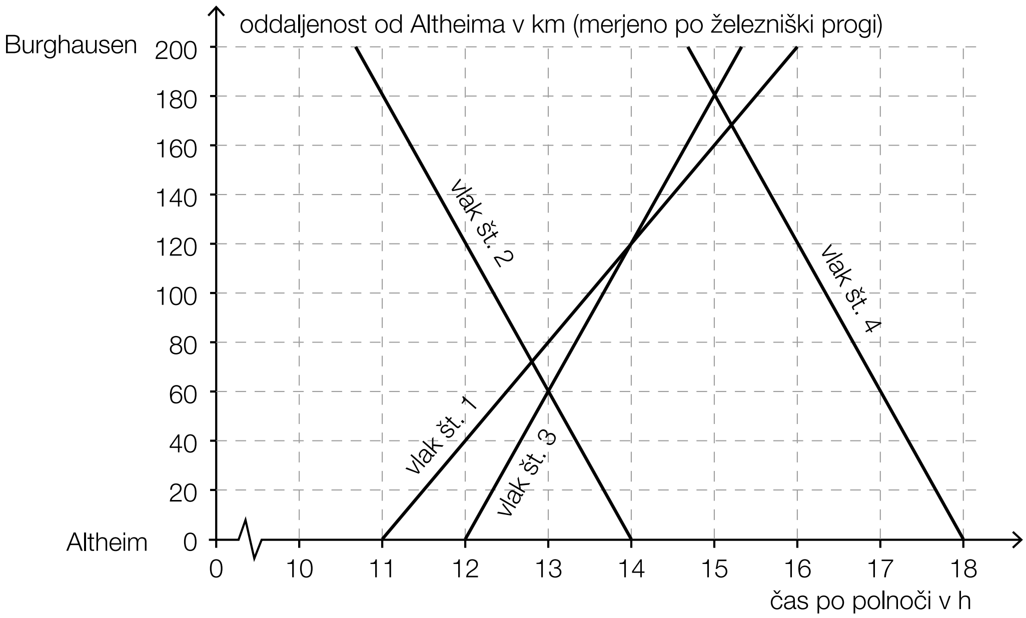
Pri Sandri znaša koncentracija zaščitnih protiteles neposredno po cepljenju 80 IE/L. Njena koncentracija zaščitnih protiteles eksponentno upada z enakim razpolovnim časom kot pri Bernhardu.

2) Na gornjo sliko vrišite časovni potek Sandrine koncentracije zaščitnih protiteles v časovnem intervalu [0; 5]. [1 točka]

Naloga 4

Železnica

Na naslednji sliki je predstavljen tako imenovani slikovni vozni red za vlake med Altheimom in Burghausnom. Vlaki pri tem vozijo – poenostavljeno gledano – s konstantno hitrostjo.



a) Vlak št. 3 odpelje iz Altheima ob 12:00.
Vlak št. 4 odpelje iz Burghausna ob 14:00.
Na poti do svojih ciljnih postaj se vlaka srečata.

1) Iz gornjega slikovnega voznega reda odčitajte, kdaj in kako daleč od Burghausna se vlaka srečata. *[1 točka]*

b) 1) Utemeljite, da vlaka št. 2 in št. 4 vozita z enako hitrostjo. *[1 točka]*

c) Vožnja vlaka št. 5 naj bo na slikovnem voznem redu predstavljena z izsekom grafa funkcije s.

$s(t) = -80 \cdot t + 1\,160$

t ... čas po polnoči v h
$s(t)$ ... oddaljenost od Altheima ob času t v km

1) Določite čas, ob katerem vlak št. 5 odpelje iz Burghausna. *[1 točka]*

2) V gornji slikovni vozni red vrišite funkcijski graf za s med Altheimom in Burghausnom. *[1 točka]*

d) Neka železniška proga je doga 200 km. Po obnovi tirov lahko vlaki vozijo z 10 km/h višjo hitrostjo. Čas vožnje se s tem za pol ure skrajša.
V pojasnilo so predstavljene navedbe v spodnji preglednici.
t je pri tem čas pred obnovo v urah.

	dolžina proge v km	hitrost v km/h	čas vožnje v h
po obnovi	200	$\left(\frac{200}{t} + 10\right)$	$\left(t - \frac{1}{2}\right)$

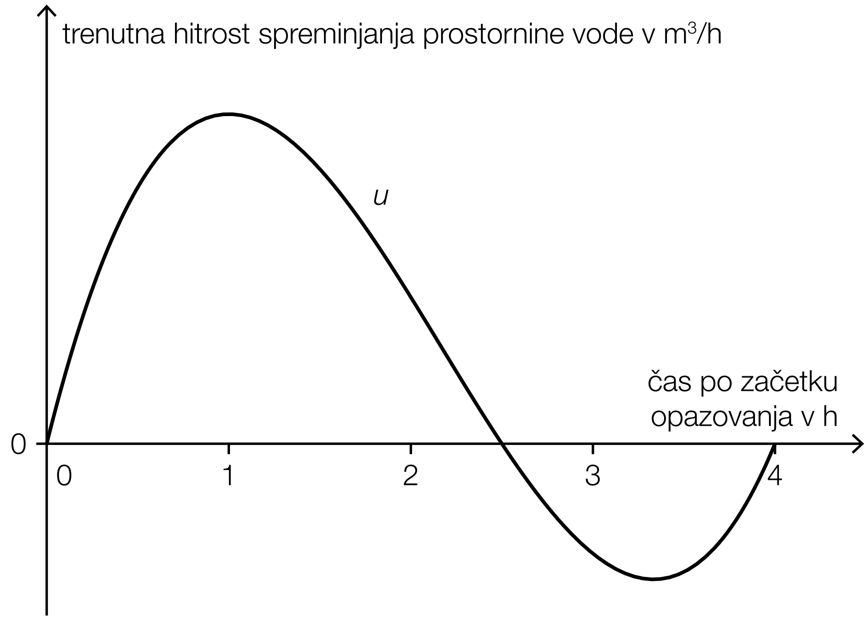
1) Izračunajte t. *[1 točka]*

Naloga 5

Akumulacijsko jezero

a) Prostornina vode v nekem akumulacijskem jezeru se zaradi različnih vplivov, kot npr. padavin, dotokov in odvzemov vode, spreminja.

Ob začetku nekega opazovanja znaša prostornina vode v akumulacijskem jezeru $1{,}5 \cdot 10^8$ m³. Trenutno hitrost spreminjanja prostornine vode je moč na časovnem intervalu [0; 4] približno opisati z neko funkcijo u, katere graf je predstavljen na naslednji sliki.



1) Ob navedbi ustreznih enot interpretirajte, kaj se v dani vsebinski poezavi izračuna z naslednjim izrazom:
$1{,}5 \cdot 10^8 + \int_0^4 u(t)\,\mathrm{d}t$ *[1 točka]*

2) S pomočjo funkcijskega grafa argumentirajte, da prostornina vode v akumulacijskem jezeru v časovnem intervalu [1; 2] upada. *[1 točka]*

b) Časovni potek vodostaja nekega akumulacijskega jezera je moč v določenem časovnem obdobju približno opisati s funkcijo h:

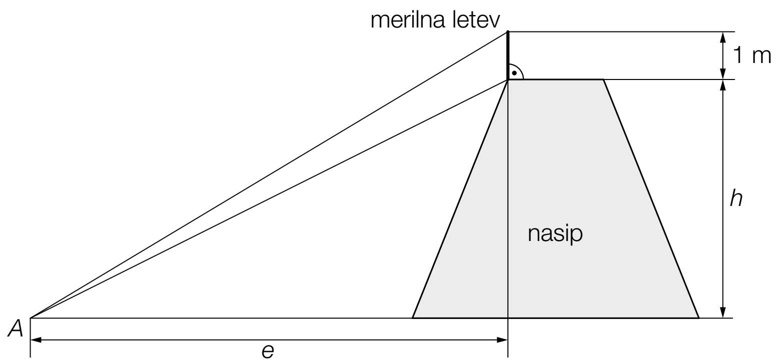
$h(t) = -6 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 0{,}001 \cdot t^2 + 0{,}005 \cdot t + 5 \quad \text{pri} \quad 0 \leq t \leq 150$

t ... čas v h
$h(t)$ ... vodostaj ob času t v m

Dokler je vodostaj 9 m ali višji, je parkirni prostor v bližini obrežja zaprt.

1) Izračunajte trajanje zapore. *[2 točki]*

c) Za protipoplavno zaščito so na enem bregu zgradili nasip. Višina nasipa se določa z 1 m visoko merilno letvijo. V ta namen se iz neke točke A vizirata konca merilne letve in izmerita višinska kota $\alpha = 40{,}0°$ in $\beta = 33{,}7°$ (glej naslednjo skico, ki ni v pravem merskem sorazmerju).



1) V gornjo skico vrišite kota α in β. *[1 točka]*

Za izračun višine nasipa h se uporabljata naslednji formuli:

$\tan(\alpha) = \dfrac{h + 1}{e}$

$\tan(\beta) = \dfrac{h}{e}$

2) Izračunajte višino nasipa h. *[1 točka]*

Naloga 6 (del B)

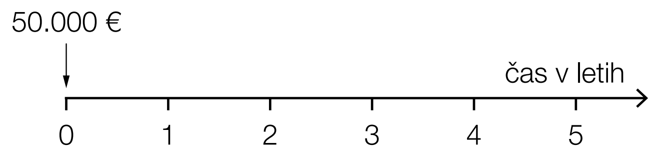
Dedovanje

a) Armin dobi dediščino v višini 50.000 €, ki bo izplačana v obliki 3 zneskov v naslednjih 5 letih. Višino izplačil Z je moč izračunati z naslednjo enačbo:

$$50\,000 = \frac{20\,000}{1{,}03} + \frac{Z}{1{,}03^3} + \frac{Z}{1{,}03^5}$$

1) Odčitajte pripadajočo letno obrestno mero. *[1 točka]*

2) Na naslednji časovni osi ponazorite vsa izplačila, ki nastopajo v enačbi. *[1 točka]*



3) Izračunajte višino izplačil Z. *[1 točka]*

b) Jutta je podedovala 50.000 €. Ta znesek naloži z obrestno mero 3 % p. a.

V naslednjih 5 letih želi vsakič ob koncu vsakega meseca dvigniti enako visok znesek, tako da bo po teh 5 letih od naloženega denarja preostal še znesek v višini 20.000 €.

Jutta razmišlja, da lahko mesečno dvigne okroglo $\frac{50.000\text{ €} - 20.000\text{ €}}{60} = 500\text{ €}$.

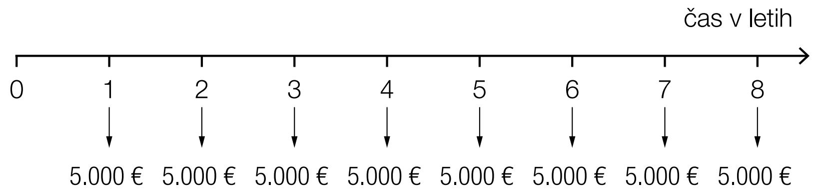
1) Utemeljite, zakaj so dejanski mesečni obroki večji od 500 €. *[1 točka]*

2) Izračunajte pripadajočo ekvivalentno mesečno obrestno mero. *[1 točka]*

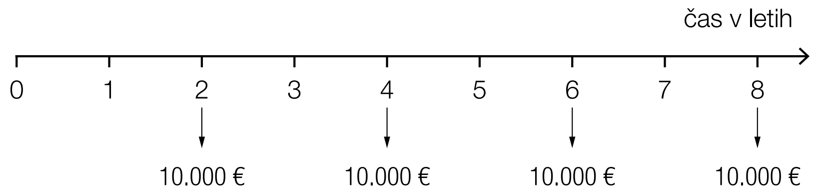
3) Izračunajte višino teh dejanskih mesečnih obrokov. *[1 točka]*

c) Na spodnjih časovnih oseh so predstavljena izplačila dediščine.

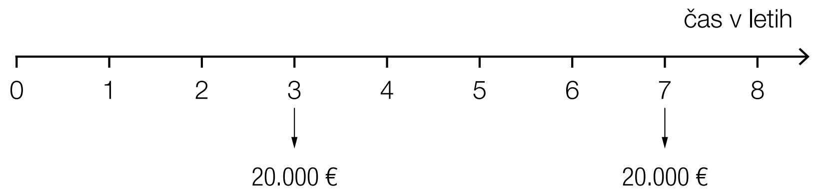
1) S križcem označite tisto izplačilno varianto, ki ima pri neki pozitivni obrestni meri največjo gotovinsko vrednost. *[1 izmed 5]* *[1 točka]*



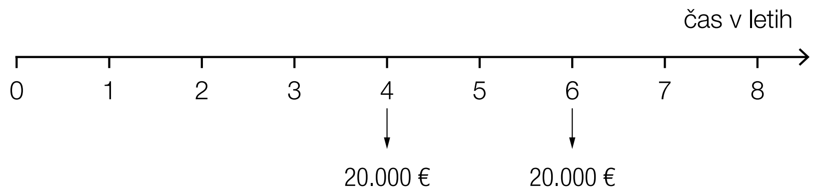
☐



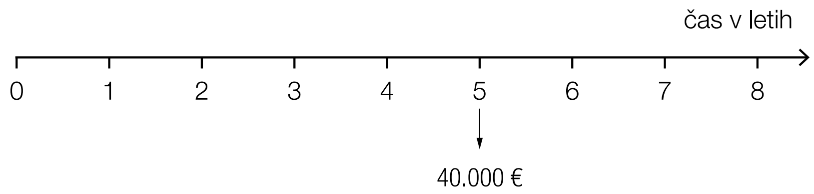
☐



☐



☐



☐

Naloga 7 (del B)

Kavni avtomat

Združenje staršev neke šole se je odločilo za učence/-ke in učitelje/-jice nabaviti kavni avtomat.

a) Stroški za kavni avtomat znašajo 5.500 €.

Združenje staršev dobi naslednjo leasing-ponudbo:

- predplačilo: 1.000 € ob sklenitvi pogodbe
- 48 mesečnih obrokov po vsakič 100 €
- Obročna plačila se pričnejo en mesec po sklenitvi pogodbe.
- Preostalo vrednost v višini 900 € je potrebno plačati hkrati z zadnjim obrokom.

1) Izračunajte efektivno letno obrestno mero za to ponudbo. *[2 točki]*

b) Združenje staršev plača stroške za kavni avtomat v višini 5.500 € takoj in lahko zato obdrži prihodke.

Blagajnik združenja staršev postavi za osnovo svojega izračuna naslednje predpostavke:

- Računa s 150 lončki kave na dan, za 40 šolskih tednov s po 5 dni.
- blagovni vložek na lonček kave: 30 centov
- prodajna cena na lonček kave: 45 centov
- stroški vzdrževanja: 1.400 € na leto
- Po 4 letih naj bi bil kavni avtomat prodan za 900 €.

1) V naslednjo preglednico vnesite prihodke, izdatke in povračila (presežke). *[1 točka]*

leto	prihodki v evrih	izdatki v evrih	povračila (presežki) v evrih
0			
1			
2			
3			
4			

Blagajnik predpostavlja kalkulacijsko (obračunsko) obrestno mero 1,8 % p. a.

2) Izračunajte vrednost kapitala. *[1 točka]*

c) 80, od skupaj 200, šolskih dni ima Chiara popoldanski pouk.

Ob šolskih dneh s popoldanskim poukom spije kavo z 90 %-no verjetnostjo, ob šolskih dneh brez popoldanskega pouka znaša ta verjetnost 20 %.

1) Za to dejansko stanje sestavite drevesni diagram, označen z vsakokratnimi verjetnostmi. *[1 točka]*

2) V dani vsebinski povezavi opišite en možen dogodek E, čigar verjetnost se izračuna na naslednji način:
$P(E) = \frac{120}{200} \cdot 0{,}8 = 0{,}48$ *[1 točka]*

3) Izračunajte verjetnost, da ima Chiara danes popoldanski pouk, ob predpostavki, da je danes popila kavo. *[1 točka]*

Naloga 8 (del B)

Mešalnik

Neko podjetje izdeluje različne tipe mešalnikov.

a) Pri ceni 65 € po kosu, je moč prodati 2000 paličnih mešalnikov na leto.
Pri prodaji 2500 paličnih mešalnikov je lahko dosežen izkupiček v višini 131.250 €.

Izkupiček pri prodaji paličnih mešalnikov je moč opisati z neko kvadratno funkcijo E:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … število prodanih paličnih mešalnikov
$E(x)$ … izkupiček pri x prodanih paličnih mešalnikih v €

1) Utemeljite, zakaj mora biti v enačbi funkcije izkupička parameter c enak nič. *[1 točka]*
2) Nastavite sistem enačb za izračun koeficientov a in b in funkcije izkupička. *[1 točka]*
3) Izračunajte koeficienta a in b. *[1 točka]*
4) Izračunajte količino zasičenosti. *[1 točka]*

b) Dobiček pri prodaji ročnih mešalnikov je moč opisati s funkcijo G.

$G(x) = -0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940$

x … prodajna količina v KE
$G(x)$ … dobiček pri prodajni količini x v DE

1) Izračunajte meji dobička. *[1 točka]*
2) Določite maksimalni dobiček. *[1 točka]*

S spremembami v podjetju se lahko znižajo fiksni stroški za 200 DE.

3) Nastavite enačbo nove funkcije dobička G_1. *[1 točka]*

c) Stroške pri proizvodnji stoječih mešalnikov je moč opisati s funkcijo K.

$K(x) = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$

x … proizvodna količina v KE
$K(x)$ … stroški pri proizvodni količini x v DE

1) Dokazljivo preverite, če je potek stroškov pri proizvodnji 25 KE progresiven ali degresiven. *[1 točka]*

2) S križcem označite tisto enačbo, katere rešitev je optimum obratovanja. *[1 izmed 5]* *[1 točka]*

$0 = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$	☐
$0 = 0{,}12 \cdot x^2 - 4{,}8 \cdot x + 63$	☐
$0 = 0{,}24 \cdot x - 4{,}8$	☐
$0 = 0{,}04 \cdot x^2 - 2{,}4 \cdot x + 63 + \frac{940}{x}$	☐
$0 = 0{,}08 \cdot x - 2{,}4 - \frac{940}{x^2}$	☐