Ime:	
Razred/Letnik:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

15. januar 2019

Uporabna matematika

TAK/HAK

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za reševanje nalog

Draga kandidatka! Dragi kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred vami, vsebuje 6 nalog v delu A in 3 naloge v delu B z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge lahko obdelujete neodvisno drugo od druge. Na voljo imate skupno 270 minut čistega delovnega časa za del A in del B.

Pri reševanju uporabljajte pisalo v modri ali črni barvi, ki ga ni moč odstraniti z radirko. Pri konstrukcijskih nalogah lahko uporabite tudi svinčnik.

Za reševanje uporabljajte izključno zvezek z nalogami in liste za odgovore, ki so vam dani na razpolago. Vpišite svoje ime v za to predvideno polje na prvi strani zvezka z nalogami in na vsak list z odgovori. Pri odgovarjanju vsake delne naloge navedite oznako le-te (npr. 3c ali 3d1).

V vrednotenje bo vključeno vse, kar ni prečrtano. Zabeležke prečrtajte.

Uporaba s strani *»Schulbuchaktion«* potrjenih zvezkov formul oz. zbirke formul za SRDP iz uporabne matematike in elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije) je dovoljena, če ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, itraneta, bluetooth, mobilnega omrežja itd.) in v elektronski pripomoček niso implementirani lastni podatki. Priročniki za uporabo elektronskih pripomočkov so dopustni v originalni tiskani obliki ali v elektronski pripomoček integrirani obliki.

Oddati je potrebno zvezek z nalogami in vse liste z odgovori, ki jih boste uporabljali.

Smernice za reševanje

- Vsak izračun je potrebno izvesti z razumljivim računskim nastavkom in razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljene funkcije tehnologije).
- Spremenljivke, ki jih izberete sami, je potrebno pojasniti in po potrebi navesti enote.
- Rezultate je potrebno nedvoumno poudariti.
- Rezultate je potrebno navesti z ustreznimi enotami, če je to v navodilu za postopek izreceno zahtevano.
- Če so kot rešitve izdelani diagrami ali skice, je potrebno osi opisati (skalirati) ter označiti.
- Če so izdelane geometrijske skice, je potrebno dele, ki so pomembni za rešitev, označiti.
- Izogibajte se prezgodnjega zaokroževanja.
- Priložite morebitne računalniške izpise rešitve, opremljene z vašim imenom.
- Če je naloga izračunana večkrat, je potrebno vse poti reševanja razen ene, prečrtati.

Za vrednotenje velja naslednji ključ:

44–48 točk	»Sehr gut« / prav dobro
39–43 točk	»Gut« / dobro
34–38 točk	»Befriedigend« / povoljno / zadovoljivo
23–33 točk	»Genügend« / zadostno
0–22 točk	»Nicht genügend« / nezadostno

Razlaga formatov odgovorov

Delne naloge lahko vsebujejo naslednje formate odgovorov: *odprti format odgovora, polodprti format odgovora, konstrukcijski format, prireditveni format* in *multiple-choice-format v različici »1 izmed 5«.*

Odprti format odgovora: pri odprtem formatu odgovora lahko poteka reševanje na zelo različne načine, npr. z izračunom ali na grafični način (z izdelavo grafikona).

Polodprti format odgovora: pri polodprtem formatu odgovora je potrebno pravilni odgovor vstaviti v vnaprej podano formulo, funkcijo itd.

Primer:

Dan je pravokotnik s stranicama a in b.

– Nastavite formulo za izračun ploščine A tega pravokotnika.

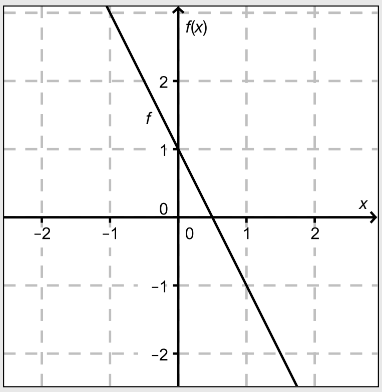
$A = a \cdot b$

Konstrukcijski format: Dan je diagram, grafikon ali slika. Zastavitev naloge zahteva dopolnitev s točkami in/ali premicami in/ali krivuljami in/ali vpisovanjem vrednosti oz. označevanjem koordinatnih osi na diagramu, v grafikonu ali na sliki.

Primer:

Dana je linearna funkcija f pri $f(x) = k \cdot x + d$.

– V naslednji koordinatni sistem narišite graf linearne funkcije pri $k = -2$ in $d > 0$.



Prireditveni format: Za ta format je značilno, da je podanih več izjav (oz. tabel ali slik), nasproti katerih stoji več možnosti odgovorov. Nalogo tega formata pravilno rešite tako, da z vstavljanjem **ustreznih črk** dotičnim izjavam priredite pravilne možnosti odgovorov.

Primer:

– Dvem enačbam priredite vsakič ustrezno oznako (izmed A do D).

1 + 1 = 2	A
2 · 2 = 4	C

A	seštevanje
B	deljenje
C	množenje
D	odštevanje

Multiple-choice-format v različici »1 izmed 5«: Za ta format je značilna ena zastavitev vprašanja in 5 možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno možnost odgovora**. Nalogo tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite pravilno možnost odgovora.

Primer:

– S križcem označite ustrezno enačbo.

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 3	☐
4 + 5 = 8	☐
5 + 5 = 5	☐

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah za označevanje s križcem:
1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato križcem označite želeni okvirček.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tukaj je bil najprej izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

Tako izberete odgovor, ki ste ga že prebarvali:
1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Obkrožite želeni prebarvani okvirček.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Tukaj je bil najprej odgovor »2 + 2 = 4« prebarvan in nato ponovno izbran.

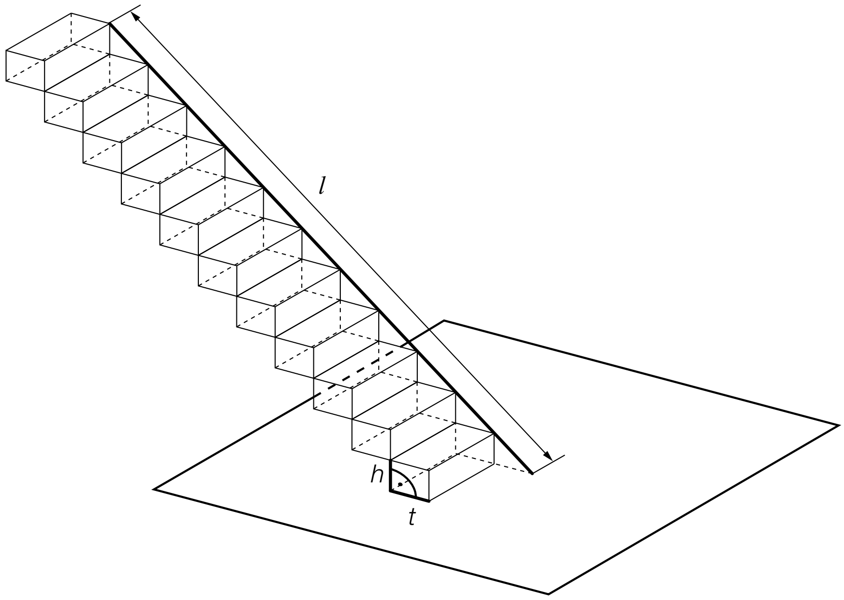
Veliko uspeha!

Naloga 1

Tekoče stopnice

Za veliko ljudi je z naraščajočo starostjo hoja po stopnicah vedno težavnejša. Tekoče stopnice lahko premagovanje stopnic bistveno olajšajo.

a) Postavili bomo tekoče stopnice. Za to mora biti vgrajena vodilna tirnica z dolžino l (glej priloženo sliko). Višina stopnice h in globina stopnice t sta za neko naravnost potekajočo stopnico v razmerju $h : t = 3 : 4$.



Stopnišče sestoji iz skupno 11 stopnic. Vodilna tirnica tekočih stopnic naj poteka neposredno po stopnicah.

1) Nastavite enačbo funkcije, ki opisuje dolžino vodilne tirnice v odvisnosti od globine stopnice.

[1 točka]

b) Neko podjetje ponuja tekoče stopnice, ki lahko premagujejo vzpon 200 %.

1) S pomočjo skice predstavite vzpon 200 %. *[1 točka]*

c) Gospa Huber bi rada dala v svoji hiši vgraditi tekoče stopnice.
Na izbiro ima naslednji ponudbi (morebitne obresti ostanejo neupoštevane):
ponudba 1: tekoče stopnice za nakupno ceno 9.480 €.
ponudba 2: tekoče stopnice pri enkratnem vplačilu 300 € in mesečno najemnino 60 €.

1) Za vsako od obeh ponudb nastavite po eno funkcijsko enačbo, ki opisuje stroške v odvisnosti od časa v mesecih. *[1 točka]*

Gospa Huber načrtuje, da se bo po 10 letih preselila v dom za upokojence, in tedaj več ne bo potrebovala tekočih stopnic.

2) Z dokazom preverite, če je pri tej predpostavki ponudba 2 za gospo Huber ugodnejša kot ponudba 1. *[1 točka]*

Naloga 2

Vožnja po ovinku

Motorist prevozi krožno zastavljeni ovinek.
Formula za velikost centrifugalne sile se glasi:

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

F ... velikost centrifugalne sile v newtonih (N)
m ... masa v kg (motornega kolesa in motorista)
v ... hitrost motorista v m/s
r ... polmer ovinka v m

a) 1) Na podlagi te formule pojasnite, kako se spremeni F, če voznik prevozi ovinek z dvojno hitrostjo. *[1 točka]*

b) 1) Grafično predstavite F v odvisnosti od r na intervalu [10; 140], če znašata $v = 20$ m/s in $m = 380$ kg. *[1 točka]*

2) Na navpični osi označite spremembo F, pri razpolovitvi polmera iz 80 m na 40 m. *[1 točka]*

c) Voznik prevozi ovinek s konstantnim polmerom r in konstantno hitrostjo v enkrat s polnim rezervoarjem in enkrat s skoraj praznim rezervoarjem.
Masa s polnim rezervoarjem znaša 380 kg, masa s skoraj praznim rezervoarjem pa znaša 362 kg.

1) Izračunajte za koliko odstotkov je F pri skoraj praznem rezervoarju manjša kot pri polnem rezervoarju. *[1 točka]*

Naloga 3

Kovanci

Susi in Markus igrata s poštenimi kovanci. Pri metu poštenega kovanca nastopata oba dogodka »glava« in »številka« vsakič z enako verjetnostjo.

a) Susi ima škatlo s 3 eno-evrskimi kovanci in 5 dvo-evrskimi kovanci.
Markus ima škatlo z 2 eno-evrskima kovancema in 3 dvo-evrskimi kovanci.
Oba izvlečeta iz svojih škatel slučajno vsakič po 1 kovanec.

1) Navedite tiste možnosti, ki vodijo do skupne vrednosti 3 € (pri Susi un Markusu skupaj). *[1 točka]*

2) Izračunajte verjetnost, da bo z obemi izvlečenji dosežena skupna vrednost 3 €. *[1 točka]*

b) Markus hoče 10 krat vreči dvo-evrski kovanec.
Susi zastavi vprašanje: »S kakšno verjetnostjo bova vsaj 3-krat dobila ›številko‹?«

1) Izračunajte verjetnost, da je pri 10 metih vsaj 3-krat vržena »številka«. *[1 točka]*

c) Susi in Markus se ukvarjata z verjetnostjo, pri kateri se pri ponavljajočih se metih kovanca pojavi »številka«. Pri tem naletita na naslednjo enačbo:

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}5^n = 0{,}9375$

X ... število metov z izidom »številka«

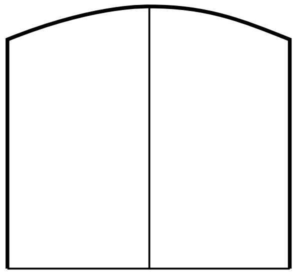
1) Izračunajte n. *[1 točka]*

2) Interpretirajte pomen števila n v tej povezavi. *[1 točka]*

Naloga 4

Vrata skednja

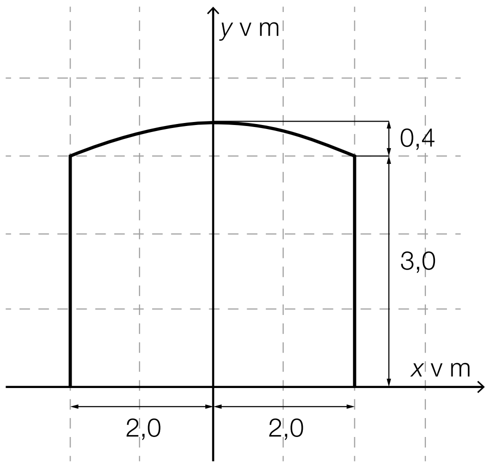
Skedenjska vrata sestojijo iz 2 simetričnih kril. Prednja stran skedenjskih vrat (pravokotnik z dodanim obokom) je poenostavljeno predstavljena na naslednji sliki.



a) Obok skedenjskih vrat lahko približno opišemo z grafom kvadratne funkcije z naslednjo enačbo (primerjaj spodnjo sliko):

$y = a \cdot x^2 + b$

x, y ... koordinate v m



1) Izračunajte koeficienta a in b. *[1 točka]*

b) Za neka druga skedenjska vrata, katerih krili sta široki po 2,5 m, je moč obok približno opisati z grafom kvadratne funkcije f:

$f(x) = -0{,}08 \cdot x^2 + 4$

x ... koordinata v m
$f(x)$ ... višina skedenjskih vrat na mestu x v m

1) Izračunajte ploščino sprednje strani skedenjskih vrat. *[1 točka]*

c) Ploščina prednje strani nekih drugih skedenjskih vrat znaša 16 m^2. Skedenjska vrata so debela 8 cm.
Za jakost sidranja je pomembno poznati maso vrat. Masa je produkt volumna in gostote materiala.
Gostota materiala znaša 0,7 kg/dm^3.

1) Določite maso skedenjskih vrat v tonah. *[1 točka]*

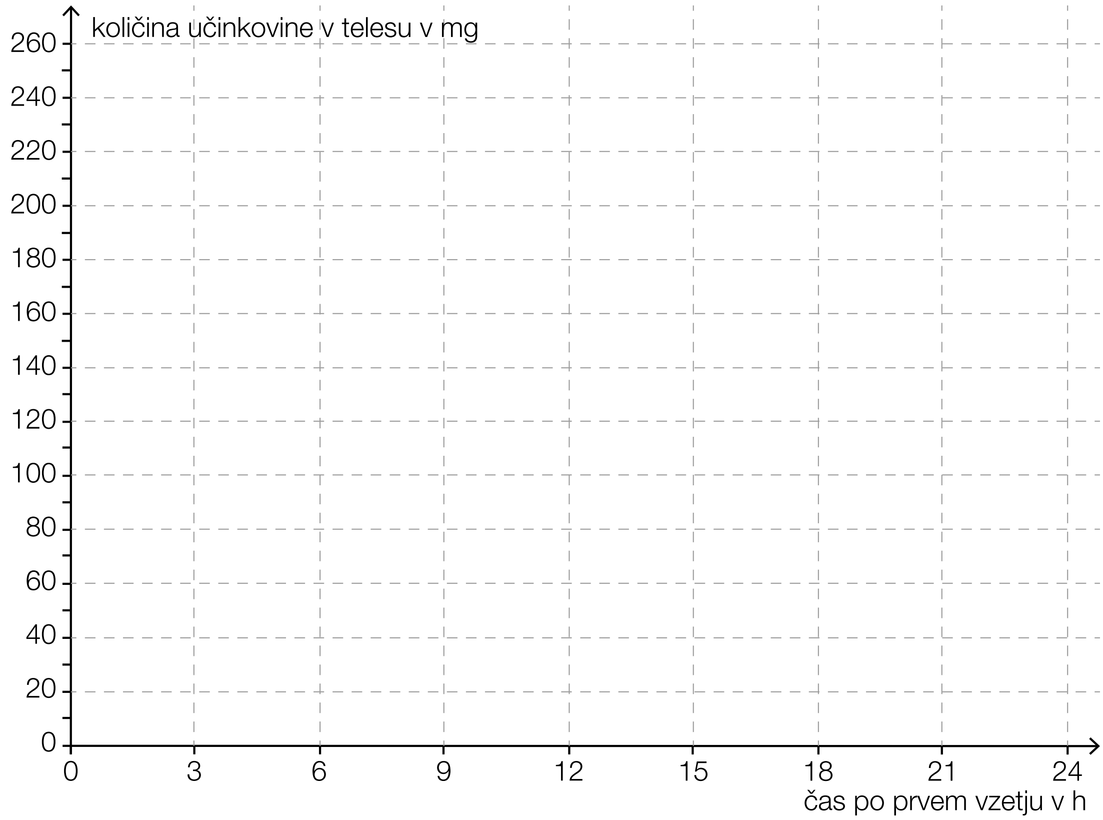
Naloga 5

Razgradnja zdravil

Zdravnica predpiše pacientu za zdravljenje njegovega povišanega krvnega pritiska zdravilo s količino učinkovine 240 mg na tableto, ki se v telesu eksponentno razgradi z razpolovnim časom 3 ur. Privzamemo, da učinkovina preide v kri takoj po zaužitju tablete.

a) Pacient vzame ob 7. uri in ob 19. uri vsakič po eno tableto.

1) Grafično predstavite količino učinkovine zdravila v telesu pacienta kot funkcijo časa za prvih 24 ur po prvem vzetju. *[2 točki]*



b) 1) Utemeljite, zakaj učinkovina po tem modelu po 24 urah (od enkratnega vzetja) še ne more popolnoma izginiti iz telesa. *[1 točka]*

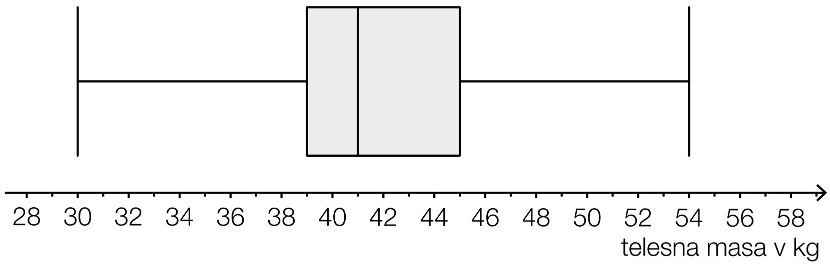
c) Nek drugi pacient vzame enkratno, samo ob 7h zjutraj, 2 tableti. Zdravilo deluje pri najnižji količini 50 mg, pod tem je njegov učinek zanemarljiv.

1) Določite, kako dolgo zdravilo učinkuje. *[2 točki]*

Naloga 6

Statistična porazdelitev telesnih mas 12-letnikov

a) Telesne mase 12-letnih učenk, ki so bile zbrane pri nekem naključnem vzorcu, so predstavljene na naslednjem Boxplot diagramu (škatli z brki):



1) Odčitajte statistični karakteristiki: *mediano* in *3. kvartil*. *[1 točka]*

V nekem dnevnem časopisu se zatrjuje: »Statistični vzorec kaže: več kot polovica 12-letnih učenk je težja od 42 kg.«

2) S pomočjo Boxplot diagrama (škatle z brki) utemeljite, zakaj je trditev v dnevnem časopisu napačna. *[1 točka]*

b) Neka šolska zdravnica je zapisala telesne mase 10 učen in učencev (navedbe v kg):

37	34	38	48	68	38	40	48	38	47

1) Določite aritmetično sredino in mediano. *[1 točka]*

c) Širom Avstrije lahko izhajamo iz tega, da so telesne mase 12-letnih učencev približno normalno porazdeljene, s pričakovano vrednostjo $\mu = 42$ kg in standardnim odklonom $\sigma = 3{,}5$ kg.

1) Na skici funkcije gostote ponazorite verjetnost, da ima slučajno izbrani 12-letni učenec telesno maso večjo od 45 kg. *[1 točka]*

2) Izračunajte tisti simetrični interval okrog μ, v katerem leži telesna masa slučajno izbranega 12-letnega učenca z verjetnostjo 90 %. *[1 točka]*

Naloga 7 (del B)

Reklama

V študentskem naselju neke univerze stanuje 1 200 študentov. Veriga s htro hrano želi na ozemlju naselja odpreti podružnico z novimi, posebej za študente prilagojenimi, produkti. Širi se govorica, da bo pri otvoritvi podružnice prisotna znana holiwoodska zvezda.

Funkcija N_G približno opisuje število študentov, ki so govorico izvedeli:

$$N_G(t) = \frac{1\,200}{1 + 1\,199 \cdot e^{-0{,}99 \cdot t}}$$

t ... čas po pojavu govorice v dnevih
$N_G(t)$ ... število študentov, ki so govorico izvedeli do trenutka t

a) 1) Izračunajte, koliko študentov je po 8 dneh izvedelo za govorico. *[1 točka]*

b) V nekem drugem, primerljivem študentskem naselju se je istočasno pričela reklamna akcija s plakati.

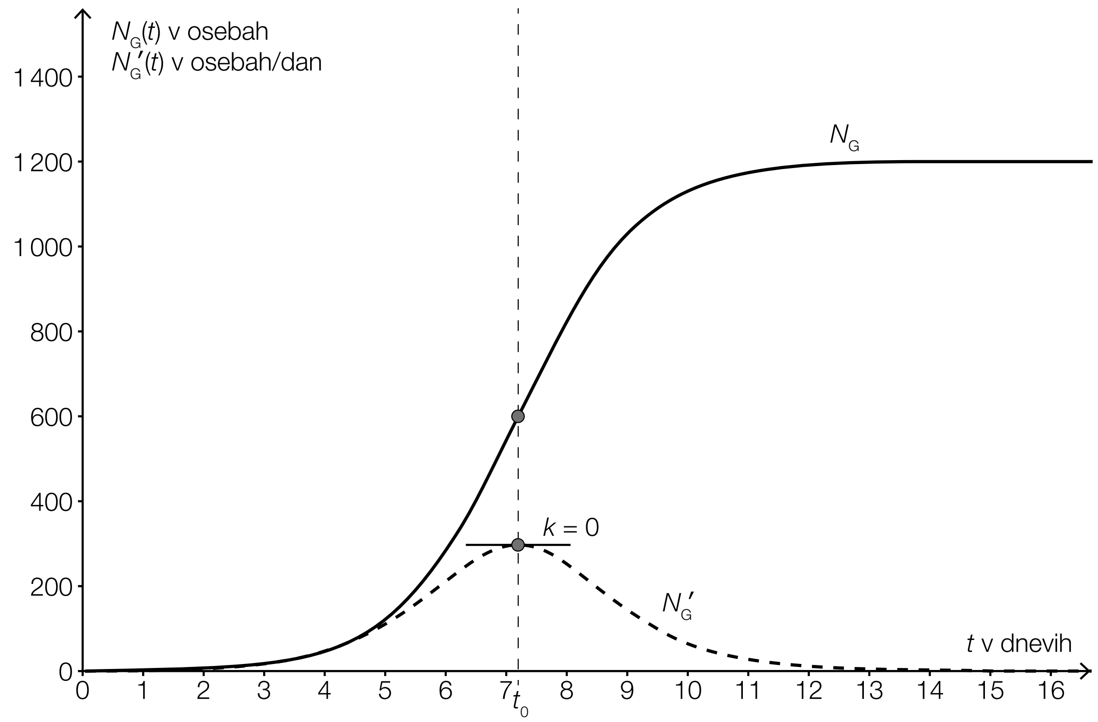
Funkcija N_W približno opisuje število študentov, ki jih je reklamna akcija dosegla:

$$N_W(t) = 1\,200 \cdot (1 - e^{-0{,}077 \cdot t})$$

t ... čas po začetku reklamne akcije v dnevih ($t \geq 1$)
$N_W(t)$ ... število študentov, ki jih je reklamna akcija dosegla do trenutka t

1) Določite tisti časovni trenutek t ($t \geq 1$), v katerem je število študentov, ki so slišali za govorico, enako številu študentov, ki jih je dosega reklamna akcija. *[2 točki]*

c) Na naslednji sliki sta predstavljena grafa funkcije N_G in njenega odvoda N_G'.



1) Opišite, katero lastnost ima na predstavljenem mestu t_0 funkcija odvoda N_G' in katero lastnost funkcija N_G. *[2 točki]*

2) V dani stvarni povezavi pojasnite pomen mesta t_0. *[1 točka]*

Neka študentka trdi, da je 2. odvod funkcije N_G za vse $t \geq 0$ pozitiven.

3) Argumentirajte, zakaj je ta trditev napačna. *[1 točka]*

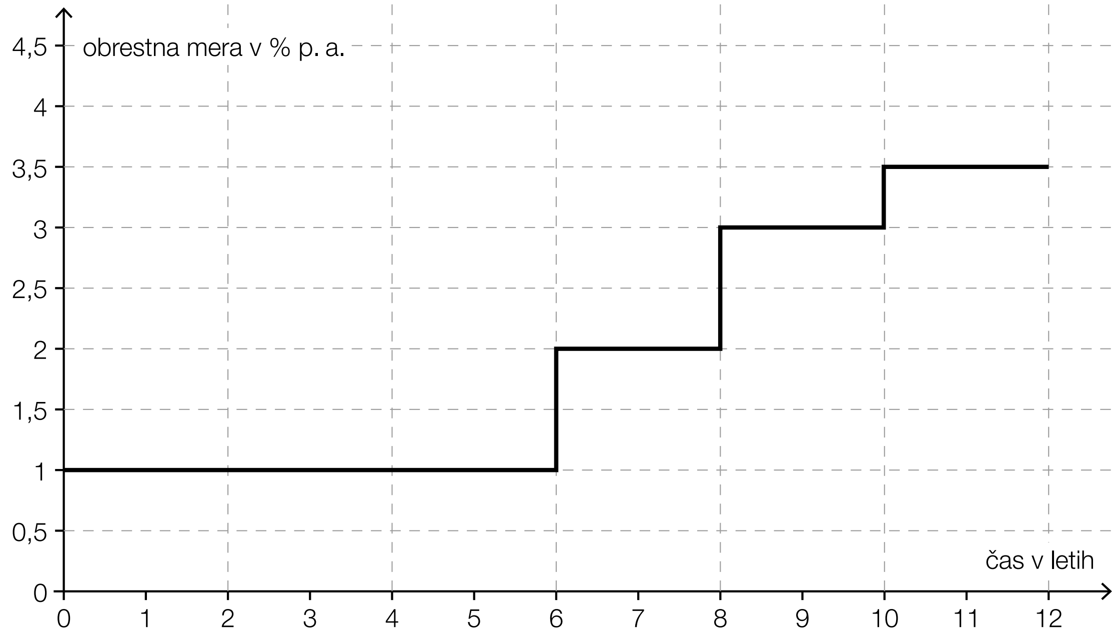
Naloga 8 (del B)

Varčevalni načrt

Monika želi v naslednjih 12 letih privarčevati 20.000 €.

V nadaljevanju davek na kapitalski donos ni upoštevan.

a) Monika opazuje ponudbo neke banke za stanovanjski kredit z rokom vračila 12 let (glej naslednji grafikon). Letno obrestovanje pri tem v toku let narašča.



1) Iz gornjega grafikona odčitajte višino in trajanje letnih obrestnih mer. *[1 točka]*

2) Izračunajte povprečno letno obrestno mero. *[1 točka]*

3) Izračunajte višino tistega zneska, ki ga mora Monika naložiti sedaj, da bi v 12 letih dosegla svoj varčevalni cilj 20.000 €. *[1 točka]*

b) Na hranilni knjižici ponuja banka za 12 let fiksno obrestno mero 2 % p. a. Da bi v 12 letih dosegla svoj varčevalni cilj 20.000 €, bi lahko Monika takoj položila 8.000 € in izvedla še dve enako visoki vplačili Z, eno po 3 in eno po skupaj 8 letih.

1) Ponazorite Monikin načrt vplačil in varčevalni cilj na časovni osi. *[1 točka]*

2) Izračunajte višino vplačil Z. *[2 točki]*

c) Monika razmišlja, da bi 12 let dolgo ob začetku vsakega leta vplačala enako visok znesek, tako da bi pri fiksni obrestni meri 2 % p. a. v 12 letih dosegla svoj varčevalni cilj 20.000 €.

1) Izračunajte višino letnega privarčevanih zneskov zneska pologa R. *[1 točka]*

Razmišlja, da ne bi vplačevala ob začetku vsakega leta letnega zneska, ampak ob začetku vsakega meseca $\frac{1}{12}$ letnega zneska.

2) Argumentirajte, da svojega cilja s tem ne bo dosegla v predvidenem času. *[1 točka]*

Naloga 9 (del B)

Prometna podjetja

Podjetja mestnega prometa analizirajo svoje prihodke.

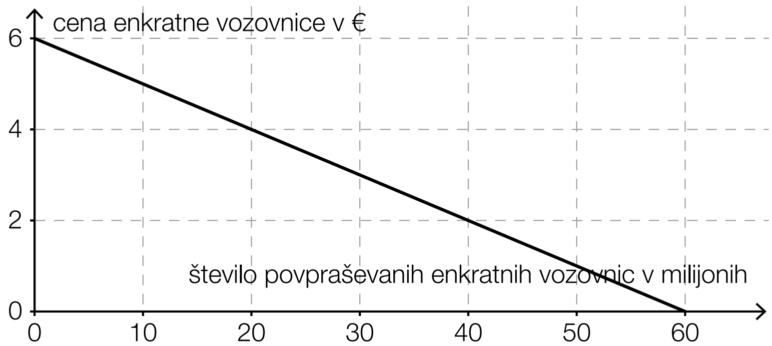
a) V mestu *A* je moč prihodke mestnih prometnih podjetij od prodaje enkratnih vozovnic modelno opisati z naslednjo funkcijo izkupička *E*:

$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 6{,}6 \cdot x$

x ... število prodanih enkratnih vozovnic v milijonih
$E(x)$ ... izkupiček pri prodaji x enkratnih vozovnic v milijonih evrov

1) Izračunajte maksimalni možni izkupiček v evrih. *[1 točka]*
2) Sestavite enačbo pripadajoče cenovne funkcije povpraševanja. *[1 točka]*
3) Določite tisto ceno enkratne vozovnice v evrih, ki vodi do maksimalnega izkupička. *[1 točka]*

b) V mestu *B* je privzeta linearna odvisnost med ceno enkratne vozovnice v evrih in številom povpraševanih enkratnih vozovnic v milijonih. Ta odvisnost je predstavljena na naslednji sliki:



1) Iz gornje slike odčitajte najvišjo ceno. *[1 točka]*
2) V dani vsebinski povezavi opišite pomen količine zasičenosti. *[1 točka]*

c) V mestu C se modelno privzema, da je odvisnost med ceno enkratne vozovnice v evrih in številom povpraševanih enkratnih vozovnic v milijonih moč opisati z neko kvadratno funkcijo p.

$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... število povpraševanih enkratnih vozovnic v milijonih
$p(x)$ ... cena enkratne vozovnice pri x povpraševanih enkratnih vozovnic v evrih

Pri ceni enkratne vozovnice 1,60 € je povpraševanih 50 milijonov enkratnih vozovnic. Pri ceni enkratne vozovnice 1,80 € je povpraševanih 48 milijonov enkratnih vozovnic. Kot najvišja cena se privzema 7,80 €.

1) Nastavite sistem enačb za izračun koeficientov funkcije p. *[1 točka]*

2) Izračunajte koeficiente funkcije p. *[1 točka]*