Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

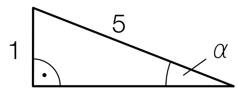
Aufgabe 1

Rampe

Unter einer Rampe versteht man eine unter einem Winkel α ansteigende schiefe Ebene, die zwei unterschiedlich hoch gelegene Flächen miteinander verbindet.

Aufgabenstellung:

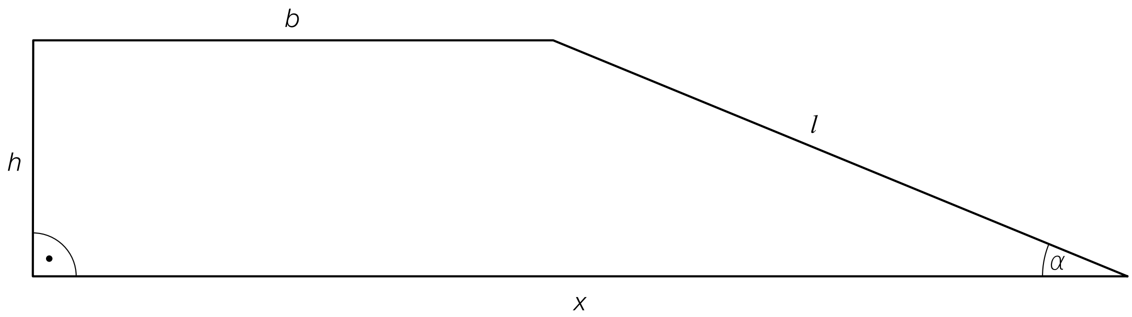
Eine Rampe mit der Länge 5 m überwindet einen Höhenunterschied von 1 m.



– Ermitteln Sie den Winkel α und die Steigung der Rampe in Prozent.

Leitfrage:

Der Zugang zu einem öffentlichen Gebäude soll durch eine Rampe mit der Länge l behindertengerecht erweitert werden. Die Rampe führt auf eine horizontale Fläche mit der Länge $b = 150$ cm, die in einer Höhe $h = 35$ cm liegt.
Der Sachverhalt ist in der nachstehenden Skizze dargestellt.



– Ermitteln Sie die Mindestlänge l der Rampe und die waagrechte Entfernung x, wenn Rampen im öffentlichen Bereich mit maximal 6 % Steigung ausgeführt werden dürfen.

Lösung zur Aufgabe 1

Rampe

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\sin(\alpha) = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 11{,}54°$

$\tan(\alpha) \approx 0{,}2041 \quad \Rightarrow \quad$ Steigung in Prozent $\approx 20{,}41\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert für α und die richtige Steigung in Prozent angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\tan(\alpha) = 0{,}06 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 3{,}43°$

$\sin(\alpha) = \frac{h}{l} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{h}{\sin(\alpha)} = 584{,}38... \quad \Rightarrow \quad l \approx 584{,}4 \text{ cm}$

$\tan(\alpha) = \frac{h}{x - b} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{\tan(\alpha)} + b = 733{,}\dot{3} \quad \Rightarrow \quad x = 733{,}\dot{3} \text{ cm}$

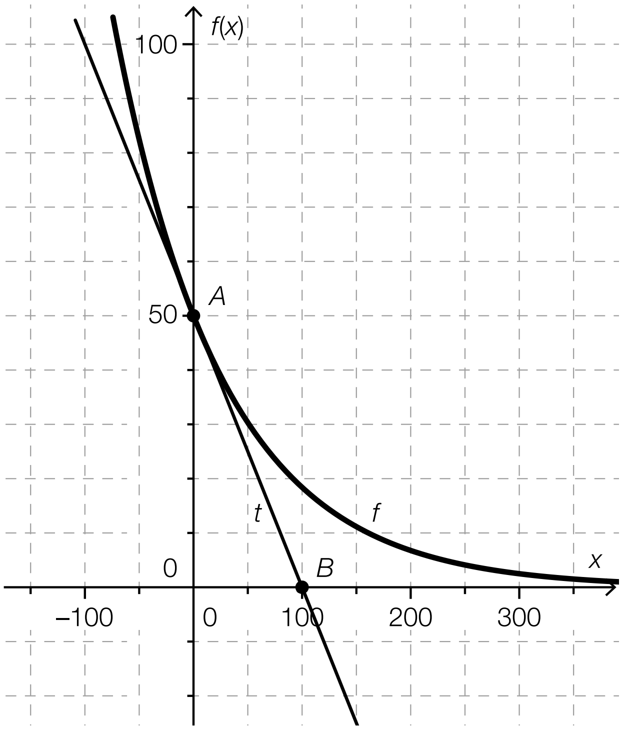
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Mindestlänge l und die richtige waagrechte Entfernung x angegeben werden.

Aufgabe 2

Tangente an den Graphen einer Exponentialfunktion

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph einer Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, \lambda \in \mathbb{R}$ und die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $A = (0|50)$ dargestellt. Der Punkt $B = (100|0)$ liegt auf der Tangente.



Aufgabenstellung:

– Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente t sowie deren Steigung k an.

Leitfrage:

– Geben Sie den Zusammenhang zwischen k und λ mithilfe einer Gleichung an und berechnen Sie den Wert von λ.

Lösung zur Aufgabe 2

Tangente an den Graphen einer Exponentialfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$t \colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $u \in \mathbb{R}$

$k = -0{,}5$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Parameterdarstellung der Tangente t sowie die richtige Steigung angegeben werden. Äquivalente Parameterdarstellungen sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(0) = 50 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 50 \cdot e^{\lambda \cdot x}$

$f'(x) = 50 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$f'(0) = k \quad \Rightarrow \quad k = 50 \cdot \lambda$

$-0{,}5 = 50 \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -0{,}01$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung sowie der richtige Wert von λ angegeben werden. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Temperatur

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Temperatur eines Stoffes 5 °C. Nach 2 Minuten ist die Temperatur auf 13 °C gestiegen.

Die Entwicklung der Temperatur kann für die ersten 3 Minuten durch die Funktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = a \cdot t^4 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ modelliert werden. Dabei wird die Zeit t in Minuten und die Temperatur T in Grad Celsius gemessen.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie die zu erwartende Temperatur des Stoffes zur Zeit $t = 3$ und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Leitfrage:

Die Funktion T soll mithilfe der Wertepaare $(0 | T(0))$ und $(3 | T(3))$ durch eine lineare Funktion L angenähert werden.

– Bestimmen Sie $L(2) - T(2)$ und deuten Sie diesen Wert im gegebenen Kontext.

Lösung zur Aufgabe 3

Temperatur

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Vorgehensweise:

$T(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad b = 5$

$T(2) = 13 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 2^4 + 5 = 13 \quad \Rightarrow \quad a = 0,5$

$T(t) = 0,5 \cdot t^4 + 5$

$T(3) = 0,5 \cdot 3^4 + 5 = 45,5$

Nach 3 Minuten beträgt die Temperatur 45,5 °C.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige zu erwartende Temperatur nach 3 Minuten angegeben und eine richtige Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\left.\begin{array}{l} L(0) = T(0) = 5 \\ L(3) = T(3) = 45,5 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad L(t) = 13,5 \cdot t + 5$$

$L(2) - T(2) = 32 - 13 = 19$

Die Funktion L liefert nach 2 Minuten eine um 19 °C höhere Temperatur als die Funktion T.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert der Differenz bestimmt und dieser richtig gedeutet wird.

Aufgabe 4

Autofahrt

Zum Zeitpunkt $t = 0$ bewegt sich ein Auto mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s.

Die Funktion a beschreibt die Beschleunigung des Autos ab diesem Zeitpunkt in Abhängigkeit von der Zeit t (a in m/s², t in s).

Im Zeitintervall [0 s; 6 s] gilt: $\int_0^6 a(t)\,\mathrm{d}t = 15$.

Aufgabenstellung:

– Interpretieren Sie $\int_0^6 a(t)\,\mathrm{d}t = 15$ im gegebenen Kontext und geben Sie die Geschwindigkeit des Autos zum Zeitpunkt $t = 6$ an.

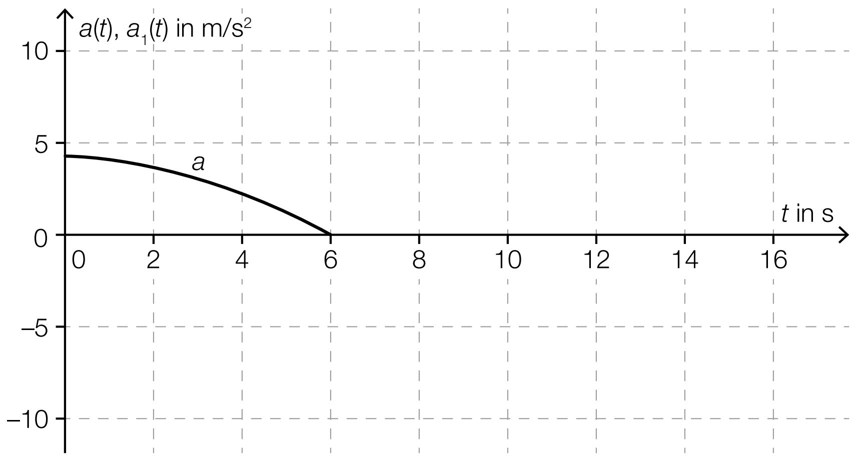
Leitfrage:

Im unten stehenden Koordinatensystem ist der Graph der Funktion a dargestellt.

Ab dem Zeitpunkt $t = 6$ wird die Beschleunigung des Autos durch eine lineare Funktion a_1 beschrieben.

Das Auto kommt nach weiteren 10 Sekunden zum Stillstand.

– Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Funktion a_1 ein und geben Sie eine Gleichung dieser Funktion a_1 an.



Lösung zur Aufgabe 4

Autofahrt

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

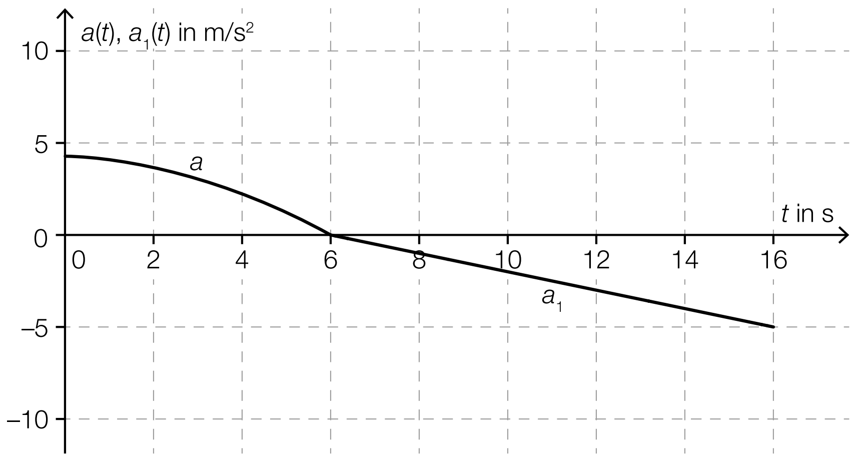
mögliche Interpretation:
Die Geschwindigkeit des Autos erhöht sich im Zeitintervall [0 s; 6 s] um 15 m/s.

Zum Zeitpunkt $t = 6$ beträgt die Geschwindigkeit des Autos 25 m/s.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Interpretation und die richtige Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 6$ angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



$a_1(t) = -0{,}5 \cdot t + 3$ (mit $6 \leq t \leq 16$)

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph von a_1 richtig eingezeichnet und eine richtige Gleichung der Funktion a_1 angegeben wird.

Aufgabe 5

Ziehen von Kugeln

In einem Gefäß befinden sich rote Kugeln und weiße Kugeln (die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden). Die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem zufälligem Ziehen eine rote Kugel zu ziehen, beträgt a.

Aufgabenstellung:

Es wird mehrmals nacheinander jeweils eine Kugel zufällig gezogen.

– Geben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Ausdruck berechnet werden kann: $P(E) = 3 \cdot a \cdot (1 - a)^2$.
  Gehen Sie dabei auch darauf ein, ob „mit Zurücklegen" oder „ohne Zurücklegen" gezogen wird.

Leitfrage:

Die Wahrscheinlichkeit p, dass bei zweimaligem Ziehen mit Zurücklegen genau eine rote Kugel gezogen wird, ist eine von a abhängige Größe. Dabei kann p als Funktion in Abhängigkeit von a aufgefasst werden.

– Geben Sie eine Funktionsgleichung von p an und ermitteln Sie das Maximum von p.

Lösung zur Aufgabe 5

Ziehen von Kugeln

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Ereignis E: Bei dreimaligem Ziehen mit Zurücklegen wird genau eine rote Kugel gezogen (bzw. werden genau zwei weiße Kugeln gezogen).

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiges Ereignis angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$p(a) = a \cdot (1 - a) \cdot 2 = 2 \cdot a - 2 \cdot a^2$

$p'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 4 \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}5$

(möglicher Nachweis für das Vorliegen eines Maximums: $p''(a) = -4 \quad \Rightarrow \quad p''(0{,}5) < 0$)

$p(0{,}5) = 0{,}5$

Das Maximum von p beträgt 0,5.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung angegeben und der richtige Wert des Maximums ermittelt wird.