

Ime:	
Razred:	



Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni izpit

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

20. september 2016

Matematika

2. del – naloge



--

Navodila za reševanje nalog

Spoštovana kandidatka! Spoštovani kandidat!

Delovni zvezek z nalogami 2. dela, ki je pred Vami, vsebuje štiri naloge z vsakič po dvema do štirimi delnimi nalogami, pri čemer so vse delne naloge rešljive neodvisno druga od druge.

Na voljo imate 150 minut čistega časa za reševanje.

Uporabljajte pisalo v modri ali črni barvi, ki ga ni moč odstraniti z radirko. Pri konstrukcijskih nalogah lahko uporabite tudi svinčnik.

Za reševanje uporabljajte ta delovni zvezek in liste, ki so vam dani na razpolago! Svoje ime in priimek vpišite na prvi strani delovnega zvezka v za to predvideno polje in na vsak posamezni list, ki ga boste uporabili! Pri reševanju vsake posamezne delne naloge navedite njeno oznako!

Pri vrednotenju bo upoštevano vse, kar ni prečrtano. Rešitev naloge mora biti pri tem jasno razvidna. Če rešitev ni jasno razvidna, ali če so navedene različne rešitve, velja naloga za nerešeno. Svoje zapiske prečrtajte.

Pri reševanju smete uporabljati dovoljeno zbirko formul in običajne elektronske pripomočke.

Oddati je potrebno delovni zvezek in vse liste, ki jih boste uporabili.

Vrednotenje

Vsaka naloga iz 1. dela bo ovrednotena z 0 točk ali z 1 točko, vsaka delna naloga iz 2. dela pa z 0, 1 ali 2 točkama. Z označene zastavitve nalog bodo ovrednotene z 0 točk ali z 1 točko.

- Če bo v 1. delu pravilno rešenih vsaj 16 od 24 nalog, bo delo ocenjeno pozitivno.
- Če bo v 1. delu pravilno rešenih manj kot 16 od 24 nalog, bodo za izravnavo bistvenega območja znanja, v skladu z odredbo o ocenjevanju znanj, upoštevane z označene naloge iz 2. dela. Če bo ob upoštevanju z označenih nalog iz 2. dela vsaj 16 nalog pravilno rešenih, bo delo ocenjeno pozitivno. Če pa bo tudi z upoštevanjem z označenih nalog iz 2. dela pravilno rešenih manj kot 16 nalog, bo delo ocenjeno z »nezadostno«.
- Če bo v 1. delu (ob upoštevanju izravnalnih točk) doseženih vsaj 16 točk, se bo delo ocenjevalo po naslednjem ključu:

Genügend	zadostno	16 – 23 točk
Befriedigend	povoljno	24 – 32 točk
Gut	dobro	33 – 40 točk
Sehr gut	prav dobro	41 – 48 točk

Pojasnilo k formatom odgovorov

Nekatere naloge imajo *proste formate odgovorov*; pri tem Vaš odgovor vpišete v delovni zvezek neposredno pod vsakokratno zastavitev naloge. Nadaljnji formati odgovorov, ki lahko pridejo v poštev pri pisnem izpitu (klavzuri), so predstavljeni kot sledi:

Prirjevalni format: za ta format je značilno več izjav (oz. tabel ali slik), nasproti katerim stoji več možnosti odgovorov. Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da vsaki izjavi priredite ustrezno možnost odgovora z vnosom odgovoru pripadajoče črke!

Primer:
Dani sta dve enačbi.

$1 + 1 = 2$	A
$2 \cdot 2 = 4$	C

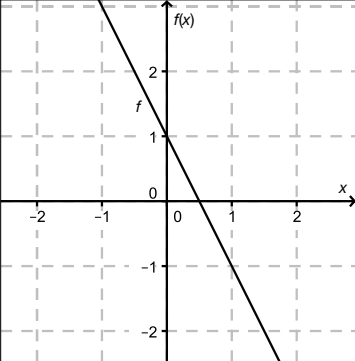
A	seštevanje
B	deljenje
C	množenje
D	odštevanje

Zastavitev naloge:
Danima enačbama priredite vsakič ustrezno oznako (izmed možnosti A do D)!

Konstruktivski format: Podana je naloga in zastavitev vprašanja. Naloga zahteva dopolnitev s točkami, premicami in/ali krivuljami v delovni zvezek.

Primer:
Dana je linearna funkcija f z $f(x) = k \cdot x + d$.

Zastavitev naloge:
V dani koordinatni sistem narišite graf linearne funkcije pri pogojih: $k = -2$ in $d > 0$!



Format multiple-choice v različici »1 izmed 6«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in šest možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati eno možnost odgovora. Naloge tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite edino pravilno možnost odgovora!

Primer:
Katera enačba je pravilna?

$1 + 1 = 1$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 2$	<input type="checkbox"/>
$3 + 3 = 3$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 8$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 5$	<input type="checkbox"/>
$6 + 6 = 6$	<input type="checkbox"/>

Zastavitev naloge:
S križcem označite ustrezno enačbo !

Format multiple-choice v različici »2 izmed 5«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in pet možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati dve možnosti odgovora. Naloge tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite obe pravilni možnosti odgovora!

Primer:
Kateri enačbi sta pravilni?

$1 + 1 = 1$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 3$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 8$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 5$	<input type="checkbox"/>

Zastavitev naloge:
S križcem označite obe ustrezni enačbi!

Format multiple-choice v različici »x izmed 5«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in pet možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno, dve, tri, štiri ali pet možnosti odgovora**. V zastavitvi naloge vedno najdete zahtevo »S križcem označite veljavno(-i/-e) izjavo(-i/-e)/enačbo(-i/-e)/ ... !« Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da s križcem označite pravilno možnost/pravilne možnosti odgovora!

Primer:
Katera(-e) izmed navedenih enačb je/so pravilna(-e)?

1 + 1 = 2	<input checked="" type="checkbox"/>
2 + 2 = 4	<input checked="" type="checkbox"/>
3 + 3 = 6	<input checked="" type="checkbox"/>
4 + 4 = 4	<input type="checkbox"/>
5 + 5 = 10	<input checked="" type="checkbox"/>

Zastavitev naloge:
S križcem označite ustrezno(-e) enačbo(-e)!

Luknjičasto besedilo: Za ta format odgovora je značilen stavek z dvema vrzelima (luknjama), kar pomeni, da sta v besedilu naloge izpostavljeni dve mesti, ki ju je potrebno dopolniti. Za vsako vrzel (luknjo) so podane tri možnosti vnosa. Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da za vsako od vrzel (lukenj) s križcem označite pravilno možnost vnosa!

Primer:
Dane so 3 enačbe.

Zastavitev naloge:
V naslednjem stavku dopolnite vrzeli (luknje) v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezne dele stavka tako, da nastane pravilna izjava!

Operacija, predstavljena z enačbo _____^①, se imenuje izračunanje vsote ali _____^②.

①	
1 - 1 = 0	<input type="checkbox"/>
1 + 1 = 2	<input checked="" type="checkbox"/>
1 · 1 = 1	<input type="checkbox"/>

②	
množenje (multiplikacija)	<input type="checkbox"/>
odštevanje (subtrakcija)	<input type="checkbox"/>
seštevanje (adicija)	<input checked="" type="checkbox"/>

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, pri katerih je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v zeleni okvirček.

1 + 1 = 3	<input type="checkbox"/>
2 + 2 = 4	<input checked="" type="checkbox"/>
3 + 3 = 5	<input type="checkbox"/>
4 + 4 = 4	<input type="checkbox"/>
5 + 5 = 9	<input checked="" type="checkbox"/>

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor »5 + 5 = 9«, nato pa spremenjen na »2 + 2 = 4«.

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite zeleni prebarvani okvirček.

1 + 1 = 3	<input type="checkbox"/>
2 + 2 = 4	<input checked="" type="checkbox"/>
3 + 3 = 5	<input type="checkbox"/>
4 + 4 = 4	<input checked="" type="checkbox"/>
5 + 5 = 9	<input type="checkbox"/>

Tukaj je bil odgovor »2 + 2 = 4« najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

Če imate še kakšno vprašanje, se prosimo obrnite na svojo učiteljico/svojega učitelja!

Veliko uspeha pri reševanju!

Naloga 1

Smuk – proga za trening

Smukačice opravljajo vožnje treninga na posebej za to pripravljeni progi. Trenerka postavlja težišče svoje analize na 240 m dolgi odsek proge od startne hiške A do točke B na progi. S pomočjo videoanaliz se prouči dolžina poti, ki jo je prevozila tekmovalka, v odvisnosti od časa.

Za določeno vožnjo na treningu neke smukačice, je moč odvisnost opravljene poti od časa, med vožnjo od A do B , modelno opisati s funkcijo s pri $s(t) = -\frac{1}{144} \cdot t^4 + \frac{8}{3} \cdot t^2$. Smukačica ob času $t = 0$ zapusti startno hiško. Čas t se meri v sekundah. Z $s(t)$ je podana dolžina poti, opravljena do časovnega trenutka t , v metrih.

Naslednje zastavitve vprašanj se nanašajo na dano funkcijo poti s , v odvisnosti od časa.

Zastavitev naloge:

- a) Da bi preverili učinkovitost na startu, se določi srednja hitrost smukačice \bar{v} na časovnem intervalu $[0 \text{ s}; 3 \text{ s}]$.

Izračunajte srednjo hitrost \bar{v} smukačice v m/s.

Izračunajte čas, potreben za vožnjo od A do B .

- b) Izračunajte tisti časovni trenutek t_1 , za katerega velja $s''(t_1) = 0$.

Interpretirajte t_1 z ozirom na vožnjo tekmovalke od A do B .

- c) Izračunajte trenutno hitrost smukačice v časovnem trenutku $t_2 = 6$.

Denimo, da ostane hitrost tekmovalke od časa t_2 nespremenjena. Navedite, po koliko sekundah od časovnega trenutka t_2 bi smukačica dosegla točko B na progi.

- d) Pri nekem matematičnem modelu naj veljajo za časovno odvisnost poti, ki jo opravi smukačica, naslednja stanja:

- (1) V časovnem trenutku $t = 0$ znaša trenutna hitrost smukačice 0 m/s.
- (2) Med vožnjo od A do B prevožena dolžina poti strogo monotono narašča.

Navedite, katere matematične lastnosti neke odvedljive funkcije poti v odvisnosti od časa s_1 , zagotavljajo ta stanja.

Naloga 2

Naraščanje prebivalstva v ZDA

V ZDA je bil prvi popis prebivalstva leta 1790. Od takrat se popisi prebivalstva izvajajo v razmiku desetih let. Med popisi prebivalstva se določa število prebivalcev/-k preko prijavnih uradov.

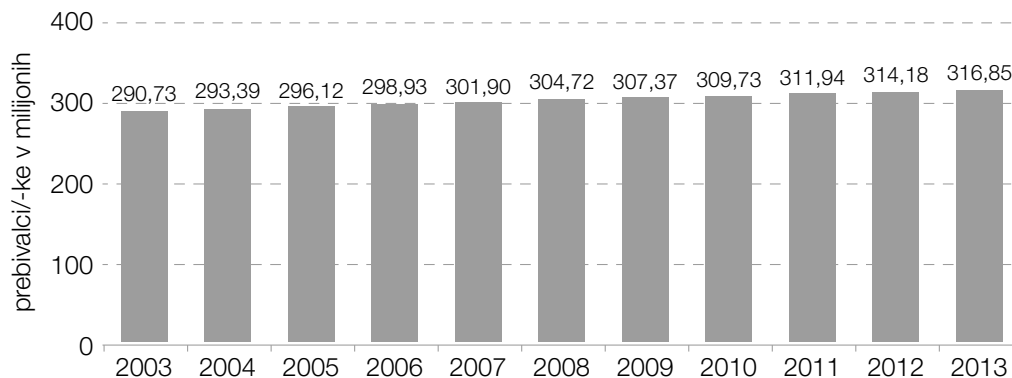
V nadaljevanju je podan pregled nad razvojem števila prebivalstva v ZDA v časovnem obdobju od 1790 do 1890 (preglednica), oz. 2003 do 2013 (grafikon).

Preglednica: razvoj prebivalstva v ZDA od 1790 do 1890

leto	število prebivalcev v milijonih	leto	število prebivalcev v milijonih
1790	3,9	1850	23,2
1800	5,2	1860	31,4
1810	7,2	1870	38,6
1820	9,6	1880	49,3
1830	12,9	1890	62,9
1840	17,1		

Vir: Keller, G. (2011). *Mathematik in den Life Sciences*. Stuttgart: Ulmer; str. 55.

Grafikon (razvoj prebivalstva v ZDA od 2003 do 2013):



Vir podatkov: <http://de.statista.com/statistik/daten/studie/19320/umfrage/gesamtbevoelkerung-der-usa/> [19.09.2013] (prirejeno).

Za časovno obdobje od 1790 do 1890 je moč razvoj števila prebivalcev/-k v ZDA približno opisati z eksponentno funkcijo B pri $B(t) = B_0 \cdot a^t$. Pri tem t podaja čas v letih, ki so pretekla od leta 1790. $B(t)$ se podaja v milijonih prebivalcev/-lk.

Zastavitev naloge:

- a) Določite enačbo funkcije $B(t)$ ob uporabi podatkov iz obeh let 1790 in 1890.

V dani povezavi interpretirajte določeni integral $\int_0^{50} B'(t) dt$.

- b) Prvi odvod funkcije B je dan z $B'(t) = B_0 \cdot \ln(a) \cdot a^t$.

Navedite t^* tako, da velja $B'(t^*) = B_0 \cdot \ln(a)$.

Interpretirajte $B'(t^*)$ v povezavi z rastjo prebivalstva v ZDA.

- c) A Utemeljite, zakaj je moč razvoj števila prebivalstva v časovnem obdobju 2003 do 2013 približno opisati z linearno funkcijo N pri $N(t) = k \cdot t + d$ (pri tem t podaja čas v letih, ki so pretekla od leta 2003).

Interpretirajte pomen parametra k te linearne funkcije. Izračun parametra k ni potreben.

Naloga 3

Pong

Pong, ki ga je leta 1972 izdalo podjetje Atari, je postala prva svetovno uspešna video igra. (Vir: <http://de.wikipedia.org/wiki/Pong>)

Princip igre *Pong* je naslednji: točka (»žoga«) se premika po ekranu vzdolž ravnih tirnic sem ter tja. Vsak/-a od obeh igralcev/-k vodi navpično črto (»lopar«), ki ga lahko z vrtljivim gumbom (»joystick«) premika navzgor in navzdol. Če igralec izpusti žogo mimo loparja, dobi nasprotnik/-ca eno točko.

Igralno polje, v katerem se premikata žoga in lopar je široko 800 pikslov in visoko 600 pikslov (piksel je slikovna točka kvadratne oblike). Poenostavljeno se privzema, da je žoga predstavljena kot en piksel.

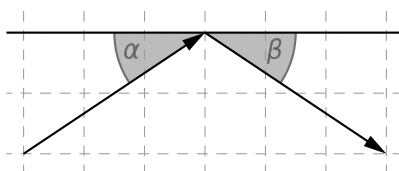
Če se žogica dotakne zgornjega oz. spodnjega roba igralnega polja ali loparja, se od tam odbije. Pri tem velja zakon odboja; le-ta trdi: $\alpha = \beta$ (primerjaj spodaj narisano skico).

Igralno polje si lahko predstavljamo kot ravnino s koordinatnim sistemom. Slikovna točka (1|1) leži tako v levem spodnjem kotu, slikovna točka (800|600) pa v desnem zgornjem kotu.

Na ekranu se slika vsake 0,02 sekunde na novo generira. Hitrostni vektor žoge $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ podaja, za koliko pikslov se je, od ene do druge obnove slike, žoga premaknila naprej v vodoravni smeri (v_x) in za koliko v navpični smeri (v_y).



Vir slike: http://www.overclockers.at/games_forum/euer-erstes-computerspiel_237146/page_2 [15.10.2015].



Zastavitev naloge:

- a) V neki konkretni igralni situaciji ima žoga pri naletu na zgornji rob igralnega polja hitrostni vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ pikslov na obnovo slike.

A) Navedite kot α , pod katerim žoga zadene rob igralnega polja.

$$\alpha = \underline{\hspace{4cm}}$$

Komponenti hitrostnega vektorja sta vedno celoštevilski. Privzemite, da vsota absolutnih vrednosti komponent ne sme biti večja od 20.

Žoga se na zgornjem robu igralnega polja odbije pod kotom β . Katero najmanjšo možno vrednost β_{\min} lahko pri teh predpostavkah zavzame kot β ? Navedite β_{\min} .

$$\beta_{\min} = \underline{\hspace{4cm}}$$

- b) Pri nekem drugem teku igre se žoga nahaja v točki (401|301) in njen hitrostni vektor je pri tem $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ pikslov na obnovo slike.

Navedite, koliko *sekund* traja, da se žoga odbije na spodnjem robu igralnega polja.

Po tem odboju se žoga giblje vzdolž premice do naslednjega naleta na lopar ali na rob igralnega polja.

Navedite parametrično predstavitev te premice.

- c) Dva otroka, Nicola in Florian, igrata *Pong* v daljšem časovnem obdobju pogosto drug proti drugemu. Od 45 iger zmaga Nicola 31 krat, Florian pa zmaga 14 krat.

Na osnovi te informacije navedite simetrični 95%-ni konfidenčni interval (interval zaupanja) za verjetnost Nicoline zmage.

Pojasnite, zakaj ni smiselno določati 100%-nega konfidenčnega intervala.

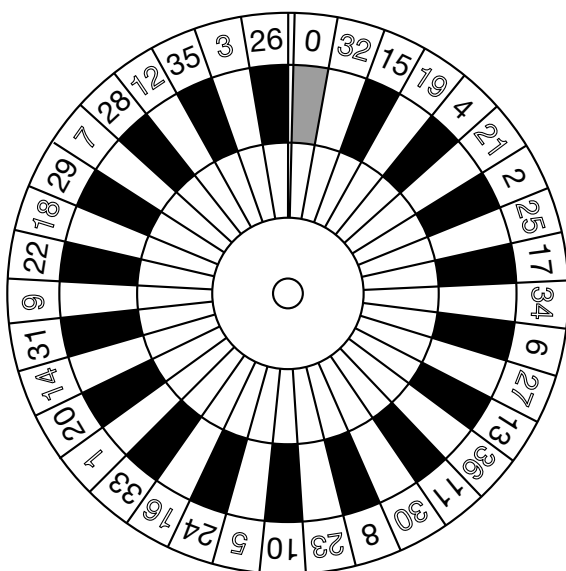
Naloga 4

Ruleta

Pri igri na srečo *ruleta* poskušamo uganiti tisto številko oz. skupino števil, ki bo določena z metom kroglice v kolo rulete.

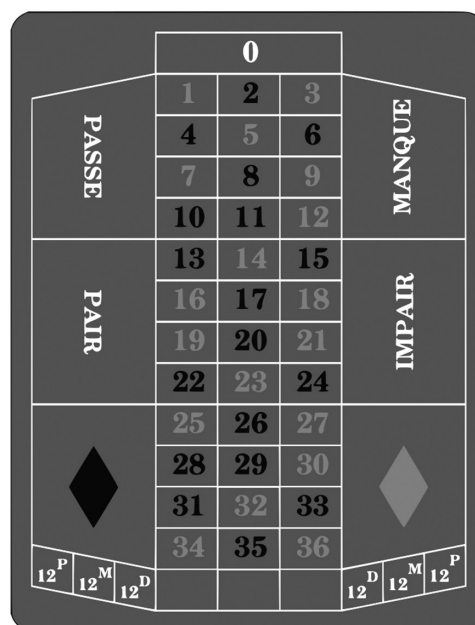
Pri *francoski ruleti* sestoji kolo rulete iz v obliko skledke pogobljene vrtljive plošče s 36 izmenično rdečimi in črnimi predali s številkami, ter 37-im, zeleno obarvanim predalom za ničlo (primerjaj sliko 1). Ruletna plošča se zavrti in kroglo se vrže nasproti smeri vrtenja v ruletno kolo. Pri tem nima noben številčni predal prednosti in ni možnosti da bi se (recimo zaradi »spretnega« meta) vplivalo na rezultat.

Cilj je, v vsaki posamični igri vnaprej uganiti, v katerem številčnem predalu bo obležala krogla. Na igralnem polju (primerjaj sliko 2) se nastavijo igralni vložki (žetoni). Polja z »1« in »7« so na primer rdeča, polja s »4« in »6« pa črna.



Silka 1

Vir: http://www.rouletteplay.com/images/software_logos_small/european-roulette-wheel.gif [23.03.2016].



Silka 2

Vir: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Roulette_frz.png [23.03.2016].

Zastavitev naloge:

- a) Nekdo argumentira: »Če je krogla pri petih igrarh zaporedoma vsakič padla na rdeče polje, pade pri 6. igri krogla z večjo verjetnostjo na črno polje, kot na rdeče, ker je pri daljši igralni seriji pričakovati za »Rouge« in »Noir« enako frekvenco (pogostost).« Navedite, če je ta argumentacija pravilna ali napačna in utemeljite vašo odločitev.

Pri neki ruletni mizi nekega večera odigrajo 100 iger.

A Izračunajte verjetnost, da krogla pri tem največ 40 krat pade v rdeči številski predal.

- b) V naslednji preglednici je navedenih nekaj možnosti stav kakor tudi vsakokratnih kvot dobitka:

način stave	kvota dobitka
Rouge: krogla pade v rdeči številčni predal	1 : 1
Noir: krogla pade v črni številčni predal	1 : 1
12 ^P : prvi ducat (številki 1 do 12)	2 : 1
12 ^M : srednji ducat (številki 13 do 24)	2 : 1
12 ^D : zadnji ducat (številki 25 do 36)	2 : 1
Plein: stavimo na eno izmed 37 številki	35 : 1
Cheval: stavimo na dve vodoravno ali navpično sosednji številki na igralnem polju, npr. 2 in 5 ali 8 in 9	17 : 1

Kvota dobitka 2 : 1 pomeni na primer, da je v primeru dobitka izplačan vložek ter dodatno dvakratnik vložka. V primeru izgube izgubimo vložek.

Kot »House Edge« (»prednost hiše«) je pri igrarh na srečo označena pričakovana izguba igralca/-ke glede na njegov / njen vložek.

Neka igralka vloži 10 € na 12^M.

Izračunajte House Edge v odstotkih vložka.

Navedite, če se v odstotkih navedeni House Edge poveča, zmanjša ali ostane isti, če igralka / igralec pri vložku a € izbere varianto Cheval.

Utemeljite vašo odločitev.