Izvod za izpraševalce/ke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

junij 2022

Matematika

Kompenzacijski izpit 5
Navedba za **izpraševalce/ke**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za standardizirano izvedbo kompenzacijskega izpita

Navedba za kompenzacijski izpit, ki je pred vami, zajema štiri naloge, ki jih je moč reševati neodvisno drugo od druge, ter pripadajoče rešitve.

Vsaka naloga zajema tri dejavnostne kompetence, ki jih je potrebno izkazati.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje največ 25 minut.

Dovoljena je uporaba Zbirke formul za SRP iz Matematike, ki je za klavzurno delo potrjena s strani pristojnega člana vlade. Nadalje je dovoljena uporaba elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije), če ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, intraneta, bluetooth, mobilnih omrežij itd.) in ni možen dostop do lastnih datotek v elektronskem pripomočku.

Po izpitu je potrebno zbrati vse dokumente (izpitne naloge, delovne liste itd.) kandidatk in kandidatov. Izpitni dokumenti (izpitne naloge, delovni listi, proizvedeni digitalni delovni podatki itd.) smejo postati javni šele po predvidenem časovnem oknu za kompenzacijski izpit.

Shema vrednotenja kompenzacijskega izpita

Naslednja shema vrednotenja je na voljo za neobvezno uporabo in služi kot pripomoček pri ocenjevanju.

	kandidat/ka 1			kandidat/ka 2			kandidat/ka 3			kandidat/ka 4			kandidat/ka 5		
naloga 1															
naloga 2															
naloga 3															
naloga 4															
skupaj															

Pojasnila za ocenjevanje

Vsaka naloga se ovrednoti z nič, eno, dvema ali tremi točkami. Skupaj je moč doseči največ dvanajst točk.

Ključ ocenjevanja za kompenzacijski izpit

Skupno število izkazanih dejavnostnih kompetenc	Ocena ustnega kompenzacijskega izpita
12	»Sehr gut«/prav dobro
10–11	»Gut«/dobro
8–9	»Befriedigend«/povoljno
6–7	»Genügend«/zadostno
0–5	»Nicht genügend«/nezadostno

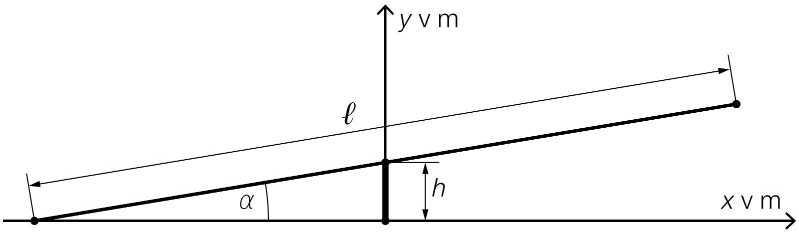
Naloga 1

Igrišče

Na nekem igrišču so na voljo različna igrala.

a) Na sliki 1 je prikazana gugalnica. Na sliki 2 je ta gugalnica modelno predstavljena v pogledu s strani.

slika 1



slika 2

Vir slik: Chabe01 – own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aire_Jeux_Rives_Menthon_St_Cyr_Menthon_16.jpg [23.12.2021] (prirejeno).

Prečka ima dolžino ℓ in njeno središče se nahaja na višini h.

1) S pomočjo h in ℓ nastavite formulo za izračun kota α:

$\alpha =$ ____

b) Okrogla odskočna ploskev na nekem trampolinu ima ploščino 5 m^2.

1) Izračunajte premer odskočne ploskve tega trampolina.

c) Nek stari peskovnik s kvadratno osnovno ploskvijo s stranico a in višino h, bo nadomeščen z novim peskovnikom.

Ta novi peskovnik s kvadratno osnovno ploskvijo naj ima enako višino, toda za 50 % večje dolžine stranic kot stari peskovnik.

1) Pokažite da prostornina novega peskovnika <u>ne bo</u> dvakrat tako velika kot je prostornina starega peskovnika.

Rešitev naloge 1

Igrišče

a1) $\alpha = \arcsin\left(\frac{h}{\frac{\ell}{2}}\right)$

ali:

$\alpha = \arcsin\left(\frac{2 \cdot h}{\ell}\right)$

b1) $d = 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{\pi}} = 2{,}52...$

Odskočna deska ima premer okoli 2,5 m.

c1) $V_{\text{stari}} = a^2 \cdot h$

$V_{\text{novi}} = (1{,}5 \cdot a)^2 \cdot h = 2{,}25 \cdot a^2 \cdot h = 2{,}25 \cdot V_{\text{stari}}$

Prostornina novega peskovnika torej ni dvakrat tako velika kot prostornina starega peskovnika.

Tudi dokaz s konkretnimi števili je vrednotiti kot pravilen.

Naloga 2

Pivska pena

Ko natočimo pivo v kozarec, nastala pivska pena počasi zopet pade sama vase.

a) Thomas v nekem določenem kozarcu meri višino pivske pene po natočenju.
V naslednji preglednici so podani njegovi rezultati merjenja.

čas po natočenju v s	0	20	60
višina pivske pene v cm	4	2,5	2

1) Ugotovite povprečno hitrost spreminjanja višine pivske pene za prvih 60 sekund po natočenju. Rezultat navedite s pripadajočo enoto.

Višina pivske pene naj bo opisana z eksponentno funkcijo h v obliki $h(t) = a \cdot b^t$.

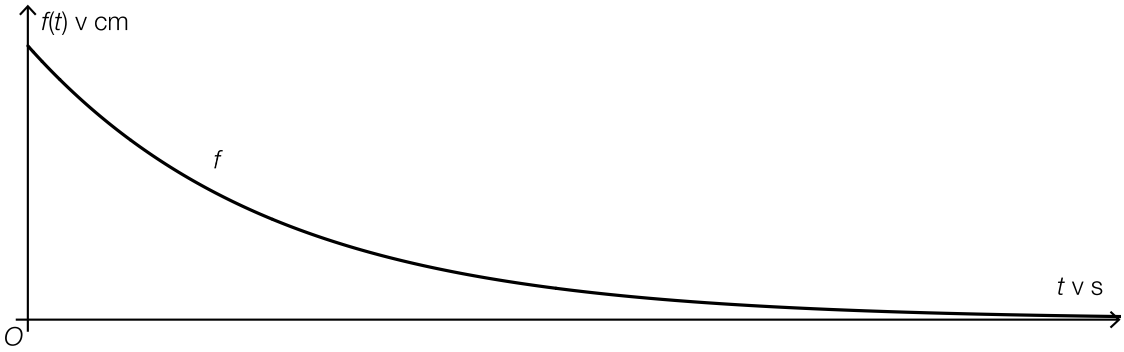
t ... čas po natočenju v s
$h(t)$ ... višina pivske pene ob času t v cm

2) Pokažite, da ni nobene eksponentne funkcije h v tej obliki, na katere grafu ležijo vsi trije rezultati merjenja.

b) Martin opisuje višino pivske pene po natočenju v neki drugi kozarec s funkcijo f (glej spodnje slike).

1) Na spodnji sliki (slika 2) skicirajte graf funkcije f'.

Slika 1



Slika 2

Rešitev naloge 2

Pivska pena

a1) $\frac{2-4}{60-0} = -0{,}0\dot{3}$

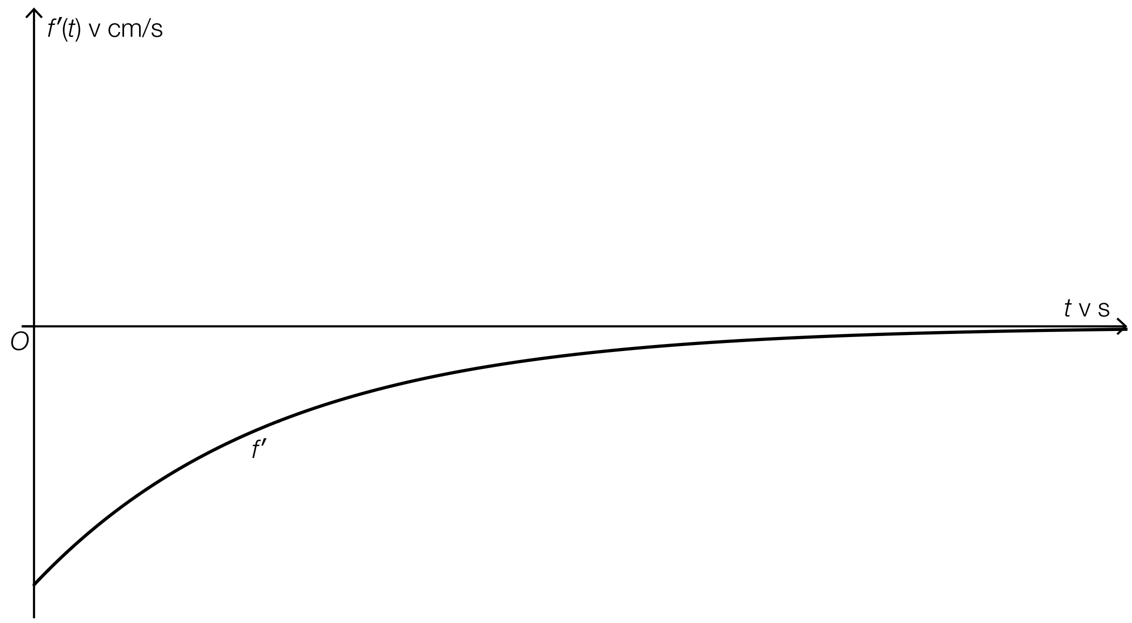
Povprečna hitrost spreminjanja znaša okoli –0,03 cm/s.

a2) $4 \cdot b^{20} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[20]{\frac{2{,}5}{4}} = 0{,}976...$

$4 \cdot b^{60} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[60]{\frac{2}{4}} = 0{,}988...$

Ker faktorji spreminjanja niso enaki, ni eksponentne funkcije v tej obliki, na katere grafu bi ležali vsi 3 rezultati merjenja.

b1)



Graf mora biti monotono naraščajoč in negativno ukrivljen ter se asimptotsko približevati vodoravni osi.

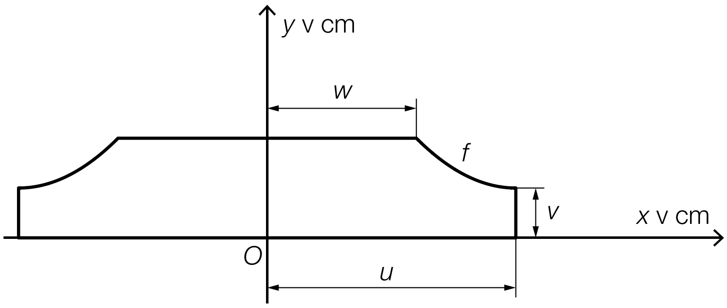
Naloga 3

Pokrov za cevi

a) Na sliki ob strani je predstavljena slika nekega pokrova za cevi za dve cevi za ogrevanje.

Vir slike: BMBWF

Na naslednji sliki je modelno predstavljena ploskev prečnega preseka tega pokrova za cevi, v pogledu od strani.



Del mejne črte prečnega preseka je moč modelirati z grafom kvadratne funkcije f pri $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Teme funkcije f ima koordinate $(u|v)$.
Kot vzpona na mestu w znaša $-45°$.

1) Sestavite sistem enačb za izračun koeficientov a, b in c.
   Pri tem uporabite u, v in w.

2) Na gornji sliki označite tisto ploskev, katere ploščino je moč izračunati z naslednjim izrazom.
   $\int_w^u f(x)\,\mathrm{d}x$

Za neki določeni pokrov za cevi pri $u = 5$ velja:

$f(x) = 0{,}25 \cdot x^2 - 2{,}5 \cdot x + 8{,}75 \quad \text{pri} \quad w \leq x \leq u$

3) Za ta pokrov za cevi izračunajte dolžino v.

Rešitev naloge 3

Pokrov za cevi

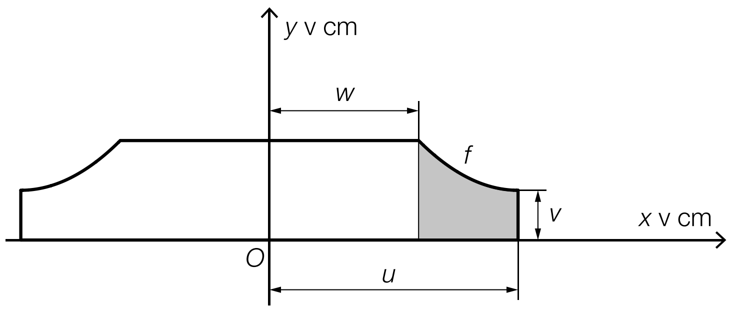
a1) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

I: $f(u) = v$
II: $f'(u) = 0$
III: $f'(w) = -1$

ali:

I: $a \cdot u^2 + b \cdot u + c = v$
II: $2 \cdot a \cdot u + b = 0$
III: $2 \cdot a \cdot w + b = -1$

a2)



a3) $f(5) = 2{,}5$

Dolžina v znaša 2,5 cm.

Naloga 4

Paketne službe

Zaradi velikega povečanja spletnega trgovanja vedno več ljudi uporablja paketno službo.

a) Za sporočanje težav s paketno službo so posebna mesta za pritožbe.
Na osnovi daljših opazovanj je znano, da se na enem takem mestu za pritožbe 11 % vseh pritožb zgodi zaradi predolgih časov dostave.

Na neki določeni dan je prispelo, neodvisno med seboj, skupaj 42 pritožb.

1) Izračunajte verjetnost, da se je natanko 8 od teh 42 pritožb zgodilo zaradi predolgih časov dostave.

b) Za vsako paketno službo je *kvota prve dostave* pomembna količina.
Kvota prve dostave ustreza verjetnosti, da je lahko neki slučajno izbrani paket dostavljen pri prvem poskusu. Pri neki določeni paketni službi znaša kvota prve dostave 90 %.

Neka dostavljalka paketov mora dostaviti n paketov.

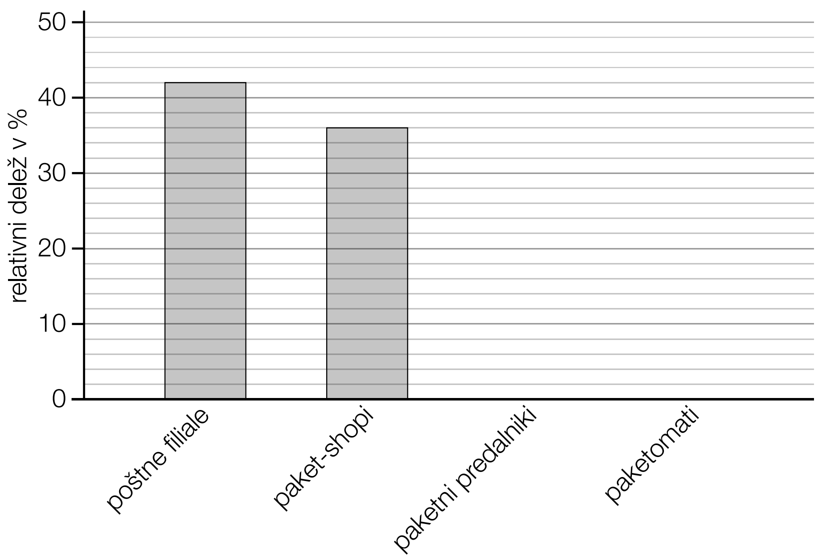
1) V dani vsebinski povezavi opišite dogodek E, katerega verjetnost se izračuna z naslednjim izrazom.

$P(E) = 1 - 0{,}9^n$

c) Z neko določeno paketno službo je bilo moč v letu 2020 odposlati pakete iz skupaj 31 200 oddajnih mest.

Teh 31 200 oddajnih mest sestoji iz 13 104 poštnih filial, 11 232 paket-shopov, 624 paketnih predalnikov in določenega števila paketomatov.

1) Dopolnite dva manjkajoča stolpca v naslednjem stolpčnem diagramu.



Rešitev naloge 4

Paketne službe

a1) X ... število pritožb zaradi predolgih časov dostave

Binomska porazdelitev pri $n = 42$, $p = 0{,}11$

Izračun s pomočjo uporabe tehnologije:

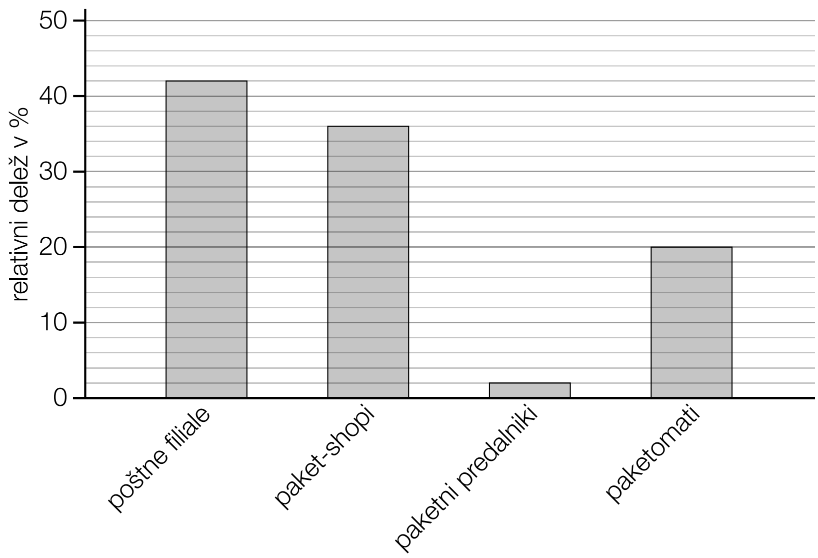
$P(X = 8) = 0{,}0481...$

Verjetnost znaša okoli 4,8 %.

b1) E ... »Dostavljalka paketov izmed teh n paketov najmanj 1 paketa ne more dostaviti v prvem poskusu«

c1) $\frac{624}{31\,200} = 0{,}02$

$\frac{31\,200 - 13\,104 - 11\,232 - 624}{31\,200} = 0{,}2$



Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

maj 2020

Matematika

Kompenzacijski izpit 6
Navedbe za **izpraševalce / izpraševalke**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za izravnalni izpit

Pola za izravnalni izpit, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog, ki so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela: pri »zastavitvi naloge« mora kandidatka/kandidat dokazati vsakokratno osnovno kompetenco *(Grundkompetenz)*, pri odgovarjanju na »nadaljevalno vprašanje«, ki sledi takoj za tem, pa dokazuje svojo sposobnost komuniciranja *(Kommunikationsfähigkeit)*.

Izpraševalci(-lke) najdete neposredno za zastavitvijo vprašanj tudi pričakovanja v zvezi z rešitvami in ključe za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za preverjanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, z eno ali z dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitev naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko in za vsako nadaljevalno vprašanje eno dodatno točko. Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		dosežene točke
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno (zadovoljivo)	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki (ali več) 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke (ali več)

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga kandidatka/kandidat doseže pri izravnalnem izpitu kakor tudi rezultat pisnega dela.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih nadaljevalnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Naklon pobočja

Da bi lahko ocenili nevarnost plazov, je pomembno poznati naklon pobočja.

Zastavitev naloge:

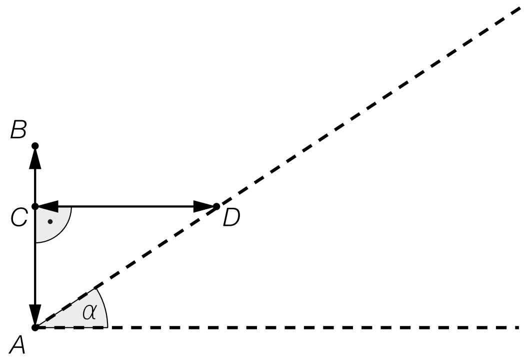
Neko določeno pobočje ima naklon 30°.

– Določite nagib v odstotkih.

Nadaljevalno vprašanje:

Na naslednji sliki je predstavljena metoda za oceno naklona pobočja s pomočjo smučarskih palic. Pri tem se naklon pobočja α določa s pomočjo dveh (enako dolgih) smučarskih palic AB in CD.

Smučarsko palico CD držimo vodoravno od pobočja, smučarsko palico AB pa postavimo v položaj pravokotno glede na palico CD (glej sliko).



– Navedite naklon pobočja, če pri navedenem postopku točki B in C sovpadata.
– Izračunajte naklon pobočja α, če znaša dolžina daljice $\overline{BC}$ eno tretjino dolžine smučarske palice $\overline{AB}$.

Rešitev naloge 1

Naklon pobočja

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$\tan(30°) = 0{,}57735... \approx 57{,}74\ \%$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno naveden naklon pobočja v odstotkih.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Če velja $B = C$, znaša naklon pobočja 45°.

$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 33{,}7°$

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je naklon pobočja v obeh primerih pravilno naveden.

Naloga 2

Splošna plinska enačba

Enačba $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ modelno opisuje povezavo med tlakom p, prostornino V, množino snovi n in absolutno temperaturo T idealnega plina. Pri tem je R neka konstanta.

Zastavitev naloge:

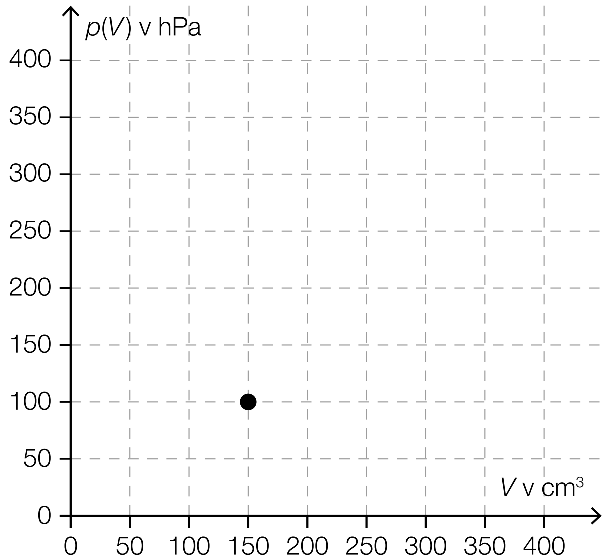
- Utemeljite, zakaj je moč odvisnost tlaka p od temperature T modelirati z neko linearno funkcijo oblike $p(T) = k \cdot T + d$ (pri k, $d \in \mathbb{R}$), če so ostale količine konstantne.
- Navedite parametra k in d te linearne funkcije.

Nadaljevalno vprašanje:

Tlak p nekega idealnega plina je moč opazovati kot funkcijo prostornine V, če so količine n, R in T konstantne.

- Dopolnite spodnjo vrednostno tabelo, predstavite graf funkcije p v spodnjem koordinatnem sistemu in navedite tip funkcije p.

V v cm^3	50	100	150	200	300
$p(V)$ v hPa			100		



Rešitev naloge 2

Splošna plinska enačba

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Če so n, R in V konstantne, velja $p(T) = \frac{n \cdot R}{V} \cdot T$. Ta enačba ustreza funkcijski enačbi linearne funkcije s parametroma $k = \frac{n \cdot R}{V}$ in $d = 0$.

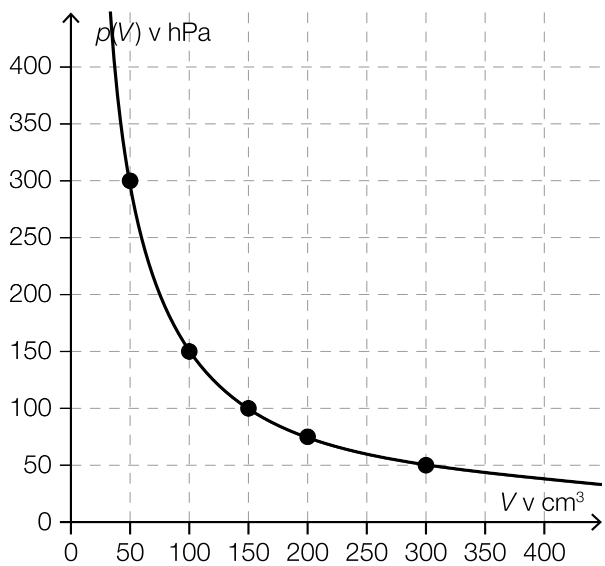
Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je dana smiselno pravilna utemeljitev in sta pravilno navedena parametra k in d pripadajoče linearne funkcije.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$p(V) = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \quad \Rightarrow \quad p(V) \cdot V = \text{konstanta} \quad \Rightarrow \quad p(V) \cdot V = 15\,000$

V v cm^3	50	100	150	200	300
$p(V)$ v hPa	300	150	100	75	50



Pri tej funkciji p gre za potenčno funkcijo.

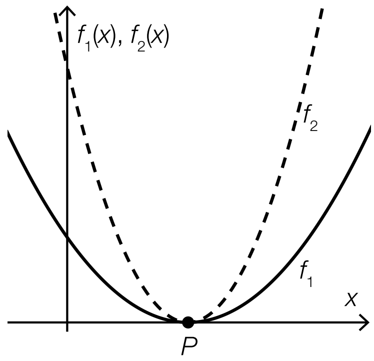
Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je vrednostna tabela pravilno dopolnjena, predstavljen pravilen graf funkcije in naveden pravilen tip funkcije.

Naloga 3

Dve paraboli

Dana sta grafa dveh funkcij f_1 in f_2 pri $f_1(x) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$ in $f_2(x) = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2$.
Grafa obeh funkcij imata skupno samo eno točko P na x-osi in sta predstavljena na naslednji sliki.



Zastavitev naloge:

– Ustrezne znake »<«, »>« ali »=« vstavite vsakič tako, da nastane pravilna izjava, ter vsakič utemeljite svojo odločitev.

a_1 ______ a_2

c_1 ______ c_2

Nadaljevalno vprašanje:

V nadaljevanju velja $a_1 = 0{,}25$ in $P = (2|0)$.

– Navedite vrednosti parametrov b_1 in c_1 ter pojasnite svoj postopek.

Rešitev naloge 3

Dve paraboli

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$a_1 < a_2$, ker poteka graf, ki pripada funkciji f_1, bolj položno kot graf, pripadajoč funkciji f_2.
$c_1 < c_2$, ker je $f_1(0) < f_2(0)$.

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko so zanki pravilno vstavljeni in navedene (smiselno) pravilne utemeljitve.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$b_1 = -1, \ c_1 = 1$

Možna pot reševanja:

$f_1(x) = 0{,}25 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$

$f_1'(x) = 0{,}5 \cdot x + b_1$

$f_1'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -1$

$f_1(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2 + c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1$

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko so navedeni: obe pravilni vrednosti parametrov in pravilen postopek.

Naloga 4

Hitrost vozila

Hitrost nekega vozila med dvema semaforjema je v časovnem intervalu $[0; t_1]$ modelno opisana s funkcijo v pri $v(t) = -\frac{4}{15} \cdot t^2 + 4 \cdot t$ pri čemer: t v s, $v(t)$ v m/s.
Ob času $t = 0$ se vozilo nahaja pri prvem semaforju.

Zastavitev naloge:

Ob časovnem trenutku t_1 se vozilo ustavi pri drugem semaforju.

– Navedite ta časovni trenutek t_1 in izračunajte pot, prevoženo v opazovanem časovnem intervalu.

Nadaljevalno vprašanje:

– Določite tisti časovni trenutek $t_0 \in [0; t_1]$, ob katerem doseže vozilo svojo največjo hitrost in navedite to maksimalno hitrost.

– Ob uporabi funkcije v navedite enačbo, s pomočjo katere je moč izračunati tisti časovni trenutek t_2, ob katerem je vozilo opravilo 80 % poti med obema semaforjema, ter izračunajte ta časovni trenutek.

Rešitev naloge 4

Hitrost vozila

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$v(t) = -\frac{4}{15} \cdot t^2 + 4 \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 15\ \text{s}$

$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{45} \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + c$

$s(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

$s(15) = 150\ \text{m}$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko sta tako časovni trenutek kot tudi prevožena pot pravilno navedena.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$v'(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{8}{15} \cdot t_0 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 7{,}5\ \text{s}$

$v(7{,}5) = 15\ \text{m/s}$

Možna pot reševanja:

$\int_0^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}8 \cdot 150 \quad \Rightarrow \quad t_2 \approx 10{,}7\ \text{s}$

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko so navedeni tako pravilni časovni trenutek t_0 in pravilna hitrost $v(t_0)$, kot tudi pravilna enačba in pravilen trenutek t_2.

Naloga 5

Razširjena množica podatkov

Dana je množica podatkov, ki sestoji iz šestih števil:

$x_1 = 4,\ x_2 = 8,\ x_3 = 2,\ x_4 = 7,\ x_5 = 4,\ x_6$

Aritmetična sredina te množice podatkov znaša $\bar{x} = 5$.

Zastavitev naloge:

– Za to množico podatkov določite vrednost x_6 in mediano.

Nadaljevalno vprašanje:

– Množico podatkov dopolnite z dvema celima številoma tako, da bosta izpolnjena oba naslednja pogoja, ter utemeljite svojo odločitev.
  - Aritmetična sredina nove množice podatkov se ujema s prvotno aritmetično sredino.
  - Mediana nove množice podatkov je večja kot prvotna mediana.

Rešitev naloge 5

Razširjena množica podatkov

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$\frac{4+8+2+7+4+x_6}{6} = 5 \quad \Rightarrow \quad x_6 = 5$

Mediana: $\frac{4+5}{2} = 4{,}5$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko sta pravilno navedeni tako vrednost x_6 kakor tudi mediana.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

števili za dopolnitev: 5 in 5

Možna utemeljitev:

Da ostane aritmetična sredina $\bar{x}$ enaka, morata biti števili, s katerima dopolnimo množico, oblike $\bar{x} - c$ in $\bar{x} + c$ pri $c \in \mathbb{N}$.

Samo za $c = 0$ in s tem natanko pri dopolnitvi množice podatkov z vrednostima 5 in 5 dobimo povečanje mediane. Pri tem zavzame mediana množice podatkov 2, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 8 vrednost $5 > 4{,}5$.
Za vse vrednosti $c \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, leži $5 - c$ pod in $5 + c$ nad prvotno mediano, tako da ima tudi razširjena množica podatkov mediano 4,5.

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko sta navedeni pravilni vrednosti za dopolnitev in podana (smiselno) pravilna utemeljitev.

Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

maj 2019

Matematika

Kompenzacijski izpit 6

Navedbe za **izpraševalce / izpraševalke**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence *(Grundkompetenzen)*, pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju *(Kommunikationsfähigkeit)*.

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko *(Grundkompetenzpunkt)*, z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko *(Leitfragenpunkt)*. Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		dosežene točke
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki (ali več) 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke (ali več)

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Premice v $\mathbb{R}^2$

Dani sta točki $A = (5|1)$ in $B = (1|2)$.

Zastavitev naloge:

Premice p, n in s potekajo vsakič skozi točko A in so opisane kot sledi:

- Premica p poteka vzporedno x-osi.
- Premica n poteka pravokotno na x-os.
- Premica s ima vzpon (smerni koeficient) 1.

Za vsako od treh premic navedite ustrezno enačbo.

Nadaljevalno vprašanje:

Premica g: $y = k \cdot x + d$ poteka skozi točko B in ima naklonski kot α.

Navedite k in d v odvisnosti od kota α.

k = ____

d = ____

Navedite tisti kot $\alpha \in [0°; 90°)$, pri katerem premici g in p nimata presečišča.

Premica g_1 poteka skozi točko B in ima enak naklonski kot kakor premica s.
Ugotovite presečišče S premice n s premico g_1.

Rešitev naloge 1

Premice v $\mathbb{R}^2$

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možne enačbe:

p: $y = 1$
n: $x = 5$
s: $y = x - 4$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko so navedene pravilne enačbe ali navedene pravilne predstavitne parametrov premic p, n in s. Ekvivalentne enačbe ali parametrične predstavitve je vrednotiti kot pravilne.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$k = \tan(\alpha)$
$d = 2 - \tan(\alpha)$

Vzpon (smerni koeficient) obeh premic je nič zato velja $\alpha = 0°$.

Velja g_1: $y = x + 1 \quad \Rightarrow \quad S = (5|6)$.

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko sta navedena pravilna k in d kakor tudi kot pravi α in presečišče premic g_1 in n.

Naloga 2

Barometrična višinska formula

Povezavo med višino h nad morsko gladino in tam vladajočim zračnim tlakom $p(h)$, je moč približno opisati z barometrično višinsko formulo:

$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$

h ... višina nad morsko gladino v metrih (m)
$p(h)$ ... zračni tlak na višini h v hektopascalih (hPa)
p_0 ... zračni tlak na višini morske gladine (pri $h = 0$); $p_0 > 0$

Zastavitev naloge:

Izračunajte tisto višino h_1, na kateri znaša zračni tlak le še 80 % p_0.

Nadaljevalno vprašanje:

Povezavo med višino nad morsko gladino in tam vladajočim zračnim tlakom, je na intervalu [0 m; 3 500 m] moč (v odvisnosti od h) približno opisati tudi z linearno funkcijo f.

Na nek določeni dan so bile ugotovljene naslednje vrednosti:

nadmorska višina v m	zračni tlak v hPa
1 500	840
2 000	790

Navedite funkcijsko enačbo funkcije f tako, da prikazuje izmerjene vrednosti.

Za zgoraj določeno višino h_1 izračunajte razliko (v hPa) med vrednostjo za $p(h_1)$, izračunano z barometrično višinsko formulo, in vrednostjo, izračunano z linearno funkcijo f. Pri svojih izračunih privzemite, da znaša vrednost p_0 1 013 hPa.

Rešitev naloge 2

Barometrična višinska formula

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$0{,}8 \cdot p_0 = p_0 \cdot e^{-\frac{h_1}{7\,991}}$

$h_1 \approx 1\,783$ m

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je ugotovljena pravilna višina h_1.
Tolerančni interval za h_1: [1 780 m; 1 790 m]

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možna pot reševanja:

$f(h) = -0{,}1 \cdot h + 990$

$p(h) = 1\,013 \cdot e^{-\frac{h}{7\,991}}$

$f(1\,783) = 811{,}7$ hPa

$p(1\,783) \approx 810{,}4$ hPa

Razlika znaša ca. 1,3 hPa.

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je navedena pravilna funkcijska enačba za f in pravilno izračunana razlika obeh funkcijskih vrednosti.
Tolerančni interval za razliko: [1 hPa; 2 hPa]

Naloga 3

Hitrosti spreminjanja

Dana je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pri $f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 1$.

Zastavitev naloge:

Določite diferencialni količnik funkcije f na mestu $x = 1$ in navedite pomen te vrednosti za potek grafa.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite izraz v odvisnosti od parametra a ($a \in \mathbb{R}$ in $a < 3$) za izračun diferenčnega količnika funkcije f na intervalu $[a; 3]$.

Vrednost parametra a določite tako, da bo ta diferenčni količnik enak diferencialnemu količniku funkcije f na mestu $x = 1$.

Rešitev naloge 3

Hitrosti spreminjanja

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$f'(x) = 2 \cdot x - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 0$

Možen pomen:
Graf funkcije f ima na mestu $x = 1$ vodoravno tangento.

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je diferencialni količnik pravilno določen in (smiselno) pravilno naveden pomen vrednosti.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možen izraz:

$$\frac{f(3) - f(a)}{3 - a} = \frac{2 - (a^2 - 2 \cdot a - 1)}{3 - a} = \frac{-a^2 + 2 \cdot a + 3}{3 - a} \quad (= a + 1)$$

$-a^2 + 2 \cdot a + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

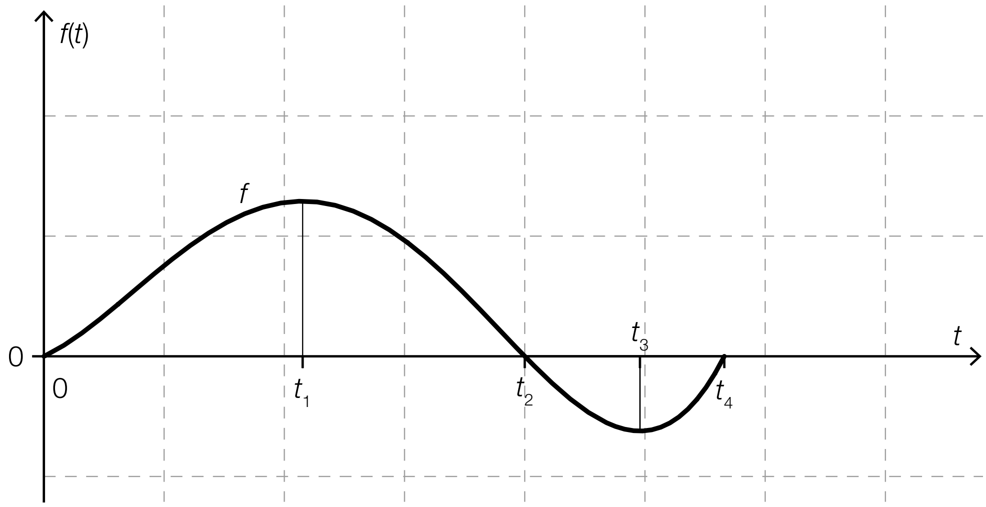
Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko sta navedena pravilni izraz in pravilna vrednost za a.

Naloga 4

Deževnica

V nekem sodu za deževnico se nahaja 20 litrov vode.
Od trenutka $t = 0$ se količina vode v sodu spreminja. Funkcija f opisuje trenutno hitrost spreminjanja količine vode, ki je vsebovana v sodu, v odvisnosti od časa ($f(t)$ v litrih na uro, t v urah).
Naslednja slika prikazuje graf funkcije f.



Zastavitev naloge:

Navedite, ob katerem od na gornji sliki označenih časovnih trenutkov t_1 do t_4 je količina vode v sodu največja, ter utemeljite svojo odločitev.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite formulo za izračun količine vode M, ki je v sodu vsebovana ob časovnem trenutku t_4.

Na gornji sliki markirajte približno tisti časovni trenutek t^*, ki leži na intervalu $[0; t_4)$, ob katerem se v sodu nahaja približno enaka količina vode kot ob časovnem trenutku t_4.
Pojasnite svoj postopek.

Rešitev naloge 4

Deževnica

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Ob časovnem trenutku t_2 je količina vode v cisterni največja, ker je f do tega časovnega trenutka pozitivna, torej količina vode v cisterni do tega časovnega trenutka narašča (za tem pa je funkcija f negativna, torej količina vode v cisterni od tega časovnega trenutka dalje upada).

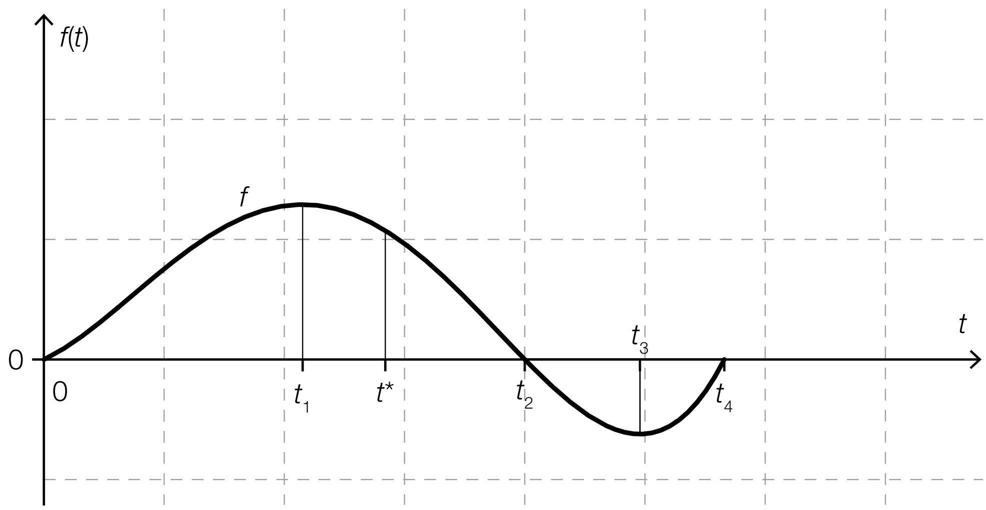
Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je časovni trenutek t_2 pravilno izbran in ta odločitev (smiselno) pravilno utemeljena.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možen formula:

$M = 20 + \int_0^{t_4} f(t)\,\mathrm{d}t$



Ploskvi, ki sta na intervalih $[t^*; t_2]$ in $[t_2; t_4]$ omejeni z grafom funkcije f in osjo x, morata biti enako veliki, ker mora količina vode v cisterni v časovnem intervalu $[t^*; t_2]$ narasti za tisto količino, za katero le-ta v časovnem intervalu $[t_2; t_4]$ upade.

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je navedena pravilna formula za M in označen pravilni časovni trenutek t^*, kakor tudi (smiselno) pravilno pojasnjen postopek.

Naloga 5

Večstopenjski slučajni poskusi

Pri neki igri na srečo se uporabljajo tri žare, s vsakič po šest kroglami. Žara *A* vsebuje pet belih krogel in eno črno kroglo, žara *B* vsebuje štiri bele in dve črni krogli in žara *C* vsebuje tri bele in tri črne krogle. Zmagamo, če izvlečemo belo kroglo.

Victoria pri tej igri na srečo sodeluje in mora takole postopati:
Najprej izbere eno izmed treh žar in nato izvleče iz te žare eno kroglo. Pri tem gre v obeh primerih (pri izbiri žare in izbiri krogle) za slučajno izbiro.

Zastavitev naloge:

Izračunajte verjetnost, da Victoria zmaga.

Nadaljevalno vprašanje:

Pri neki različici te igre na srečo se teh dvanajst belih in šest črnih krogel na novo porazdeli, pri čemer je v vsaki od treh žar zopet po šest krogel.
V prvi žari je sedaj x belih krogel, v drugi žari je sedaj y belih krogel in v tretji žari je sedaj z belih krogel.
Računsko pokažite, da se verjetnost, da Victoria zmaga, ne spremeni.

Rešitev naloge 5

Večstopenjski slučajni poskusi

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$P(„\text{Victoria zmaga}“) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je verjetnost pravilno izračunana.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$P(„\text{Victoria zmaga}“) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x+y+z}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{6} = \frac{2}{3}$

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je računsko pravilno pokazano, da je verjetnost, da Victoria zmaga, zopet $\frac{2}{3}$.

Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

junij 2018

Matematika

Kompenzacijski izpit 6

Navedbe za **izpraševalce / izpraševalke**

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence *(Grundkompetenzen)*, pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju *(Kommunikationsfähigkeit)*.

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko *(Grundkompetenzpunkt)*, z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko *(Leitfragenpunkt)*. Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		najmanjše število doseženih točk
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

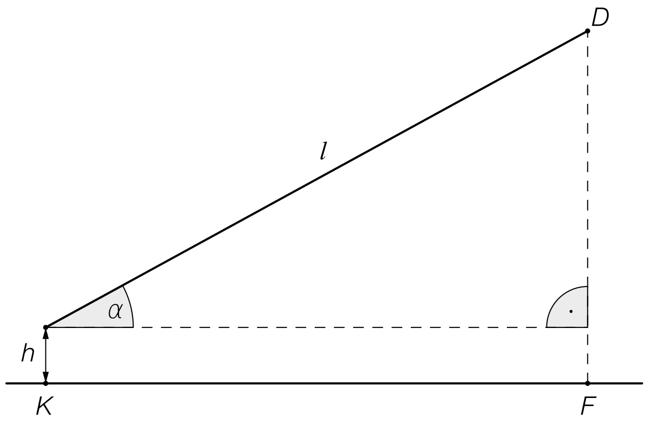
Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Spuščanje zmaja

Neki otrok spušča zmaja D v zrak. Položaja otroka (K) in zmaja (D) sta v določenem časovnem trenutku modelno predstavljena na naslednji sliki.



Stojišče otroka K in točka F ležita na vodoravni ravnini. Otrok drži zmaja na višini h = 1,5 m nad tlemi, dolžina napete zmajeve vrvice znaša l = 50 m.

Zastavitev naloge:

Navedite formulo za izračun višine $\overline{FD}$ zmaja nad ravnino (v metrih) v odvisnosti od kota α.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite enačbo, s katero je moč izračunati tisti kot α, za katerega je vodoravna oddaljenost $\overline{KF}$ enaka višini zmaja $\overline{FD}$, ter določite α.

Rešitev naloge 1

Spuščanje zmaja

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$\overline{FD} = 50 \cdot \sin(\alpha) + 1{,}5$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je navedena pravilna formula.
Ekvivalentne formule je vrednotiti kot pravilne.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$\overline{KF} = \overline{FD} \quad \Rightarrow \quad 50 \cdot \cos(\alpha) = 50 \cdot \sin(\alpha) + 1{,}5$
$\alpha \approx 43{,}78°$

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko sta navedena tako pravilna enačba za izračun in naveden tudi pravilen α.
Tolerančni interval: [43°; 44°]

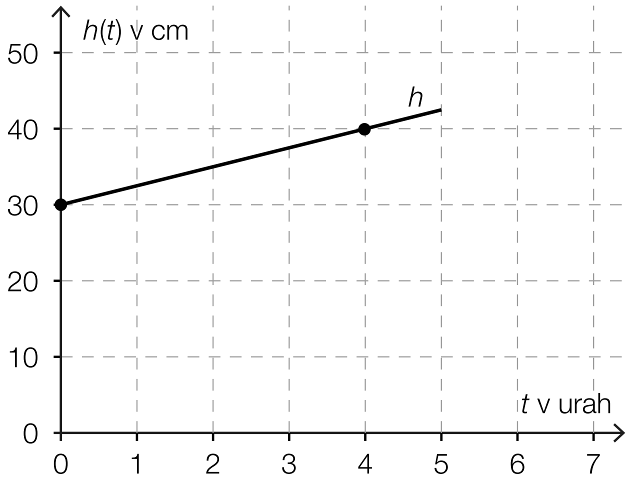
Naloga 2

Sneženje

Višino snežne odeje med peturnim sneženjem lahko modeliramo s pomočjo neke linearne funkcije h. Pri tem je $h(t)$ višina snežne odeje v cm in t čas v urah pri $0 \leq t \leq 5$.

Zastavitev naloge:

Spodaj predstavljeni graf ponazarja višino snežne odeje med tem peturnim sneženjem. Koordinate vrisanih točk so celoštevilske.



S funkcijsko enačbo opišite odvisnost višine snežne odeje h od časa t in navedite pomen številskih vrednosti, ki nastopajo v tej enačbi.

Nadaljevalno vprašanje:

Za neko funkcijo h_1 navedite vse pogoje, ki morajo biti izpolnjeni, da bo s h_1 opisano premo sorazmerje med višino snežne odeje $h_1(t)$ (v cm) in časom t (v urah).

Navedite funkcijsko enačbo tiste funkcije h_1, ki opisuje eno tako premo sorazmerje, če je snežna odeja po peturnem sneženju visoka 20 cm.

Rešitev naloge 2

Sneženje

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$h(t) = 30 + 2{,}5 \cdot t$

Ob začetku opazovanja ($t = 0$) znaša višina snežne odeje 30 cm.
Na uro se višina snežne odeje poveča za 2,5 cm.

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko so (smiselno) pravilno navedeni ustrezna funkcijska enačba in pomen številskih vrednosti.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Ob začetku opazovanja (pri $t = 0$) mora biti višina snežne odeje nič in (absolutni) prirastek višine na časovno enoto mora biti konstanten.

$h_1(t) = 4 \cdot t$

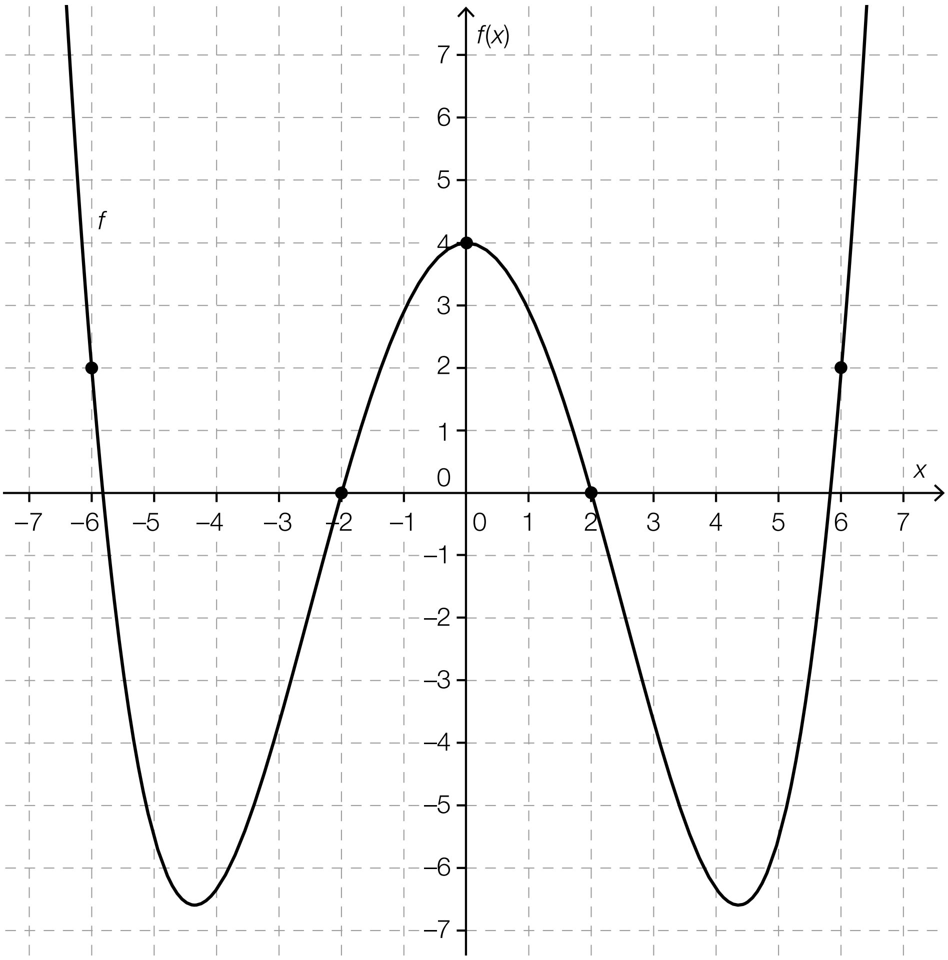
Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko so (smiselno) pravilno navedeni tako oba pogoja, ki sta navedena pri pričakovani rešitvi, kot tudi funkcijska enačba.

Naloga 3

Polinomska funkcija četrte stopnje

Na naslednji sliki je predstavljen graf neke polinomske funkcije f četrte stopnje s funkcijsko enačbo $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ pri $a, b, c \in \mathbb{R}$. Koordinate vrisanih točk so celoštevilske.



Zastavitev naloge:

Določite parametre a, b in c funkcije f. Navedite tiste intervale, v katerih velja $f'(x) > 0$, in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite en $k \in \mathbb{R}$ pri $k > 2$ tako, da bo naslednja enačba splošno veljavna, ter pojasnite svoj postopek.

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{k} f(x)\,dx = f'(0)$$

Obstoja še ena nadaljnja vrednost $h \in \mathbb{R}$, $0 \leq h \leq 2$, za katero je enačba $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{h} f(x)\,dx = f'(0)$ izpolnjena. Izračunajte to vrednost.

Rešitev naloge 3

Polinomska funkcija četrte stopnje

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$a \approx 0{,}0295$ $b \approx -1{,}1181$ $c = 4$
Intervala: $(-4{,}35; 0)$ in $(4{,}35; \infty)$

Možna pot reševanja:
Na nekem intervalu $(x_1; x_2)$ velja $f'(x) > 0$, če je pri vsakem $x \in (x_1; x_2)$ tangenta na graf funkcije f naraščajoča. Z določitvijo mest ekstremov je moč ugotoviti meje teh intervalov.

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko so pravilno navedeni tako parametri a, b in c kot tudi oba intervala in pojasnjen pravilen postopek reševanja.
Kot pravilni se vrednotijo tudi polodprti ali zaprti intervali, kakor tudi druge pravilne oblike zapisa.
Tolerančna intervala za obe spodnji meji intervalov: $[-4{,}4; -4{,}3]$ oz. $[4{,}3; 4{,}4]$

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Za $k = 3$ je enačba splošno veljavna.

Možna pot reševanja:
Velja: $f'(0) = 0$, ker je $x = 0$ mesto lokalnega maksimuma. Da bo tudi razlika določenih integralov znašala 0, morata ležati obe od nič različni meji integralov (pri pogoju $k > 2$) simetrično na izhodišče (ker je funkcija f soda funkcija oz. je graf funkcije simetričen glede na navpično os).

Tudi za $h \approx 0{,}91$ je enačba splošno veljavna.

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno naveden k, pojasnjen pravilen postopek in hkrati pravilno izračunan h.

Naloga 4

Število prebivalstva

Število prebivalstva neke države v letu t v nadaljevanju označimo z $B(t)$.

Zastavitev naloge:

Interpretirajte obe naslednji enačbi glede na število prebivalstva te države.

- $\frac{B(2015)}{B(1950)} = 2$
- $\frac{B(2015) - B(2000)}{B(2000)} = 0{,}1$

Nadaljevalno vprašanje:

V danem kontekstu interpretirajte enačbo $\frac{B(2015) - B(2000)}{15} = 100\,000$.
Na podlagi danih enačb ugotovite število prebivalstva te države v letu 2015 in pojasnite svoj postopek.

Rešitev naloge 4

Število prebivalstva

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možne interpretacije:
- Število prebivalstva države je 2015 dvakrat tako visoko kot 1950.
- Število prebivalstva države je 2015 za 10 % višje kot 2000.

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko sta obe enačbi (smiselno) pravilno interpretirani.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Število prebivalstva države je v času od 2000 do 2015 narastlo za povprečno 100 000 prebivalcev/-k na leto.

Število prebivalstva v letu 2015 znaša 16,5 milijonov.

Možna pot reševanja:
V 15 letih je s tem število prebivalstva narastlo za 1,5 milijona.
Ker to po enačbi $\frac{B(2015) - B(2000)}{B(2000)} = 0{,}1$ ustreza 10 %-nemu prirastku, mora veljati
B(2000) = 15 milijonov.
$B(2015) = \mathrm{B}(2000) + 1{,}5 = 16{,}5$

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno interpretirana enačba v kontekstu, kakor tudi pravilno določeno število prebivalstva v letu 2015 in pojasnjen pravilen postopek.

Naloga 5

Žrebanje popusta

Neka trgovina organizira igro na srečo. Cilj te igre na srečo je, s »pošteno« igralno kocko s šestimi ploskvami, vreči čim višje število. (Kocka je »poštena«, če je verjetnost, da je po metu obrnjena navzgor, za vse mejne ploskve enako velika.)
Če s kocko vržemo števila od 1 do 5, potem ustreza vrženo število popustu v odstotkih.
Če nekdo prvič vrže šestico, sme vreči še enkrat in vsota vrženih števil obeh metov znese popust v odstotkih.

Zastavitev naloge:

Določite verjetnost P, da dobi stranka popust 10 %.
Pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Slučajna spremenljivka X opisuje popust v odstotkih, ki ga lahko dobi stranka.

Navedite vse možne vrednosti, skupaj s pripadajočimi verjetnostmi, ki jih lahko zavzame slučajna spremenljivka X.

Izračunajte pričakovano vrednost $E(X)$ slučajne spremenljivke X in pojasnite izračunano vrednost v danem kontekstu.

Rešitev naloge 5

Žrebanje popusta

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Stranka dobi 10 % popusta, če pri prvem metu kocke vrže šestico in pri drugem štirico.

$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278 = 2{,}78\ \%$

Ključ za reševanje:

Osnovno-kompetenčno točko dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno navedena verjetnost in pojasnjen pravilen postopek.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Vrednosti slučajne spremenljivke:
1, 2, 3, 4, 5 z verjetnostjo vsakič $\frac{1}{6} \approx 0{,}1667 = 16{,}67\ \%$
7, 8, 9, 10, 11, 12 z verjetnostjo vsakič $\frac{1}{36} \approx 0{,}0278 = 2{,}78\ \%$

$E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot \frac{1}{6} + (7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) \cdot \frac{1}{36} \approx 4{,}08$

V povprečju je pričakovati 4 % popusta.

Ključ za reševanje:

Točko za nadaljevalno vprašanje dodelimo natanko tedaj, ko so vrednosti, ki jih lahko zavzame slučajna spremenljivka in pripadajoče verjetnosti pravilno navedene. Nadalje mora biti prav določena in pravilno navedena pričakovana vrednost.

Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

januar 2018

Matematika

Kompenzacijski izpit 1

Podatki za **izpraševalce / izpraševalke**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence *(Grundkompetenzen)*, pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju *(Kommunikationsfähigkeit)*.

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko *(Grundkompetenzpunkt)*, z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko *(Leitfragenpunkt)*. Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		najmanjše število doseženih točk
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Premice

Dane so parametrična predstavitev premice g ter enačbe treh nadaljnjih premic g_1, g_2, g_3.

$g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pri $s \in \mathbb{R}$

$g_1\colon 3 \cdot x + y = 9$

$g_2\colon y = -3 \cdot x + 10$

$g_3\colon x - 3 \cdot y = -7$

Zastavitev naloge:

Navedite, katere izmed premic g_1, g_2, g_3 oklepajo s premico g pravi kot in utemeljite svoj odgovor.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite, katere od štirih danih premic so identične in utemeljite svoj odgovor.

Navedite, kako je treba izbrati vrednosti a_1 in b_2 (pri $a_1, b_2 \in \mathbb{R}$) premice $h\colon X = \begin{pmatrix} a_1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ pri $t \in \mathbb{R}$, da bosta imeli premici g in h natanko eno presečišče.
Utemeljite svojo odločitev.

Rešitev naloge 1

Premice

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Premici g_1 in g_2 oklepata z g pravi kot.

Možna utemeljitev:
Smerni vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ premice g je hkrati normalni vektor premic g_1 in g_2.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je navedeno, da izključno g_1 in g_2 oklepata pravi kot s premico g, in je to tudi (smiselno) pravilno utemeljeno.

Utemeljitve na podlagi ustreznih skalarnih produktov oz. na osnovi skic, so prav tako dopustne.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Premici g in g_3 sta identični.

Možna utemeljitev:
Obe premici imata smerni vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in točka $P = (2|3)$ leži na obeh premicah.

Da bi imeli g in h natanko eno presečišče, morata imeti različna naklona, t. j. veljati mora $b_2 \neq \frac{1}{3}$.
Ker a_1 določa le pozicijo presečišča, ne pa njegove eksistence, je lahko za a_1 izbrano vsako realno število.

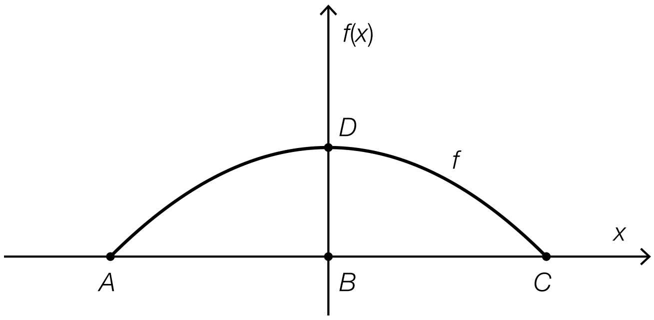
Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je navedeno, da sta g_3 in g identični in je to pravilno utemeljeno.
Nadalje je potrebno pravilno navesti utemeljitve vrednosti za a_1 in b_2 in utemeljiti njihovo izbiro.
Če so za a_1 in b_2 navedene konkretne pravilne vrednosti, je točko potrebno dodeliti.

Naloga 2

Mostni obok

Na naslednji sliki je predstavljen nek mostni obok. Daljica AC, s središčem B, ima dolžino 40 metrov, maksimalna višina mostnega oboka BD znaša 10 metrov.



Zastavitev naloge:

Določite enačbo tiste funkcije f pri $f(x) = a \cdot x^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), s katero je moč modelirati potek opisanega mostnega oboka in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Da bi lahko pod takim mostnim obokom peljala tudi večja vozila, se mora višina BD povečati. Pojasnite, ali moramo parametra a in b modelne funkcije f pri $f(x) = a \cdot x^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) pri tem vsakič izbrati večja, manjša ali enaka, če naj razdalja AC ostane nespremenjena.

Če je za koordinatno izhodišče izbrana točka A, je potrebno za modeliranje uporabiti funkcijo g pri $g(x) = c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ ($c, d, e \in \mathbb{R}$).

Vstavite »<«, »>« ali »=« tako, da bodo izjave o c, d in e pravilne za izbrano funkciji g.

c ___ 0; d ___ 0; e ___ 0

Rešitev naloge 2

Mostni obok

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možen postopek:
$D = (0|10) \;\Rightarrow\; b = 10$

Ničla funkcije f leži pri $x = 20$ (oz. -20).
$f(20) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 400 \cdot a + 10 \;\Rightarrow\; a = -\frac{1}{40} = -0{,}025$

$f(x) = -0{,}025 \cdot x^2 + 10$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je določena pravilna enačba funkcije in pojasnjen pravilen postopek.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Če višino BD povečamo, se parameter b poveča. Ker ostaneta ničli nespremenjeni, se mora parameter a zmanjšati.

$c < 0$; $d > 0$; $e = 0$

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če sta (smiselno) pravilno pojasnjeni spremembi obeh parametrov in so vstavljeni vsakič pravilni znaki.

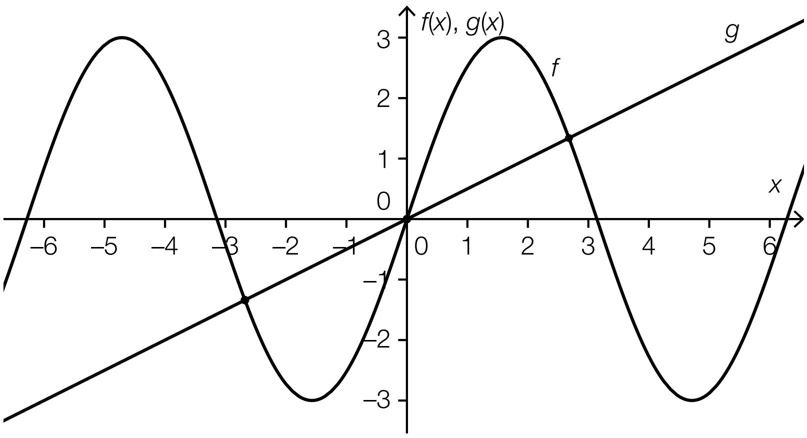
Naloga 3

Funkcije

Dani sta enačbi in grafa funkcij f in g:

$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$

$g(x) = \frac{x}{2}$



Zastavitev naloge:

Izračunajte tisto mesto x_1 na intervalu $[0; \pi]$, za katero velja $f'(x_1) = g'(x_1)$ in pojasnite, kako lahko to mesto določimo grafično.

Nadaljevalno vprašanje:

Enačba $f(x) = g(x)$ ima za x tri rešitve a, 0 in c pri $a < 0 < c$.

Na gornji sliki grafično predstavite vrednost izraza $\int_0^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

Navedite vrednost izraza $\int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

Rešitev naloge 3

Funkcije

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

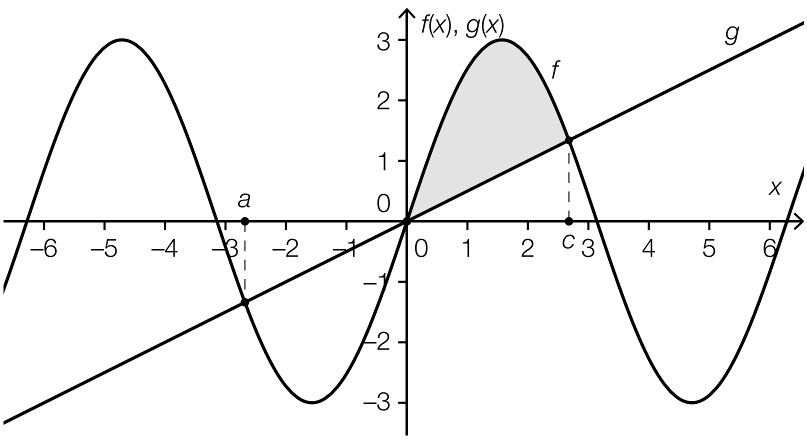
$3 \cdot \cos(x_1) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_1 \approx 1{,}4$

Vrednost x_1 opisuje tisto mesto (na intervalu $[0; \pi]$) na katerem se smerni koeficient premice ujema s smernim koeficientom tangente na graf funkcije f. Če premico g vzporedno premaknemo tako, da se na intervalu $[0; \pi]$ dotika grafa funkcije f, dobimo to vrednost kot x-koordinato dotikališča.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je x_1 pravilno izračunan in (smiselno) pravilno pojasnjen postopek za njegovo grafično določitev.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:



Vrednost izraza $\int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ je nič.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je predstavljena iskana ploskev in pravilno navedena vrednost integrala $\int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

Naloga 4

Reakcijski časi

Neka testna oseba določa svoje reakcijske čase (v s) s pomočjo online-testa, ki ga izvede deset krat in pri tem dobi naslednje vrednosti:

0,38 s; 0,27 s; 0,30 s; 0,34 s; 0,25 s; 0,39 s; 0,28 s; 0,24 s; 0,33 s; 0,32 s

Zastavitev naloge:

Za deset navedenih časov določite aritmetično sredino $\bar{t}$ in standardni odklon s.

Navedite, koliko odstotkov navedenih reakcijskih časov se nahaja v intervalu $[\bar{t} - s; \bar{t} + s]$.

Nadaljevalno vprašanje:

Testna oseba izvede ta test še nadaljnjih dvakrat in pri tem doseže časa t_{11} in t_{12} pri $t_{11} \neq t_{12}$. Aritmetično sredino, ki jo oblikujemo sedaj iz vseh dvanajstih časov, označimo s $\bar{t}_{nova}$ in iz tega izhajajoči standardni odklon označimo z s_{novi}.

Navedite, katere pogoje morata izpolnjevati časa t_{11} in t_{12}, da bo veljalo $\bar{t}_{nova} = \bar{t}$ in $s_{novi} < s$.

Rešitev naloge 4

Reakcijski časi

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$\bar{t} = 0{,}31$
$s \approx 0{,}05$
$[\bar{t} - s; \bar{t} + s] \approx [0{,}26; 0{,}36]$

V navedenem intervalu se nahaja 6 reakcijskih časov, to je 60 %.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko so pravilno navedeni aritmetična sredina, standardni odklon in iskani odstotek.

Tolerančni intervali:
za standardni odklon: [0,048; 0,052]
za spodnjo mejo intervala: [0,258; 0,262]
za zgornjo mejo intervala: [0,358; 0,362]

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Nove vrednosti morajo ležati simetrično glede na aritmetično sredino $\bar{t}$, torej mora znašati
$\frac{t_{11} + t_{12}}{2} = \bar{t}$.

Če ležijo nove vrednosti na intervalu $(\bar{t} - s; \bar{t} + s)$, potem velja $s_{\text{novi}} < s$.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko so (smiselno) pravilno navedeni iskani pogoji za časa t_{11} in t_{12}. Pri tem se kot utemeljitev za $s_{\text{novi}} < s$ upošteva tudi izjava v obliki, da morata vrednosti t_{11} in t_{12} ležati v bližini aritmetične sredine.

Naloga 5

Loterija

Pri 100 srečkah je 30 srečk z dobitkom, med temi je 25 srečk z dobitkom po 10 € in 5 srečk z dobitkom po 100 €.

Zastavitev naloge:

Izmed teh 100 srečk naključno izberemo tri srečke. Določite verjetnost, da s temi tremi srečkami ne dobimo dobitka in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Nekdo dobi podarjeno eno srečko, naključno izbrano izmed teh 100 srečk.
Navedite pričakovano vrednost zadetka.

Neka druga oseba dobi podarjeni dve srečki, naključno izbrani izmed teh 100 srečk.
Navedite izraz za izračun verjetnosti, da bo ta oseba zadela 110 € in pojasnite svoj postopek.

Rešitev naloge 5

Loterija

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Ne dobiti dobitka pomeni, da izmed preostalih 70 srečk izberemo tri srečke brez vračanja.

$\frac{70}{100} \cdot \frac{69}{99} \cdot \frac{68}{98} \approx 0{,}3385 = 33{,}85\ \%$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je pravilno navedena verjetnost in pojasnjen pravilen postopek.
Tolerančni interval za verjetnost: [33 %; 34 %]

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$\frac{25}{100} \cdot 10 + \frac{5}{100} \cdot 100 = 7{,}5$

Pričakovana vrednost za dobitek znaša 7,50 €.

Dobitek 110 € pomeni, da pri dveh srečkah dobimo en dobitek za 10 € in en dobitek za 100 €.

Možen izraz za izračun verjetnosti: $2 \cdot \frac{25 \cdot 5}{100 \cdot 99}$

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko sta pričakovana vrednost dobitka in iskani izraz pravilno navedena in pojasnjen pravilen postopek.
Ekvivalentne izraze je vrednotiti kot pravilne.

Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

oktober 2017

Matematika

Kompenzacijski izpit 1

Podatki za **izpraševalce / izpraševalke**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence (*Grundkompetenzen*), pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju (*Kommunikationsfähigkeit*).

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko (*Grundkompetenzpunkt*), z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko (*Leitfragenpunkt*). Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		najmanjše število doseženih točk
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Premice v $\mathbb{R}^3$

Dana je parametrična predstavitev premice g:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pri } t \in \mathbb{R}$$

Zastavitev naloge:

Nadalje je podana točka $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ -4 \\ p_3 \end{pmatrix}$ pri $p_1, p_3 \in \mathbb{R}$.

Navedite p_1 in p_3 tako, da bo točka P ležala na premici g.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite, kako leži premica g vsakič glede na x-, y- in z-os (je vzporedna, je identična, seka oz. je poševna) in pojasnite svoje trditve.

Nadalje je podana parametrična predstavitev premice h, v odvisnosti od a_1, a_2, a_3 (pri $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$).

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ pri } s \in \mathbb{R}$$

Navedite, katere pogoje morajo izpolnjevati a_1, a_2 in a_3, da bosta premici g in h med seboj pravokotni.

Rešitev naloge 1

Premice v $\mathbb{R}^3$

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$p_1 = 1$
$p_3 = -5$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta obe vrednosti pravilno navedeni.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možne utemeljitve:

Premica g je vzporedna y-osi, ker je smerni vektor premice g večkratnik vektorja $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in točka $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ne leži na y-osi.

Ker je premica g vzporedna y-osi in točka $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ne leži niti v xy-ravnini niti v yz-ravnini, je g poševna glede na x-os in glede na z-os.

Iz $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$ sledi, da lahko a_1 in a_3 prosto izbiramo in $a_2 = 0$.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če so odnosi lege med premico g in koordinatnimi osmi pravilno navedeni in utemeljeni (smiselno) ustrezno pričakovani rešitvi (pri čemer so dopustne utemeljitve s pomočjo skic v poševni projekciji), kakor tudi navedeni pravilni pogoji za a_1, a_2 in a_3.

Naloga 2

Zniževanje temperature

V neki steni z debelino D (v cm), ob kateri vladata na notranji- oz. zunanji strani temperaturi T_n in T_z (v °C), je moč zniževanje temperature modelirati s pomočjo linearne funkcije T pri $T(e) = k \cdot e + d$. Pri tem je $T(e)$ temperatura v °C na oddaljenosti e ($0 \leq e \leq D$, e v cm) od notranje strani stene.

Zastavitev naloge:

Določite parametra k in d, pri enačbi linearne funkcije T, za steno z $D = 40$, $T_n = 25$ in $T_z = 5$.

k = ____

d = ____

Nadaljevalno vprašanje:

Pojasnite pomen parametrov k in d, ki ste ju določili, pri navedbi pravilnih merskih enot v danem kontekstu.

Navedite, tako za parameter k kakor tudi za temperaturo T_z, vsakič možno vrednost, če velja $D = 40$, $T_n < T_z$ in $d = 20$. Pojasnite svoj postopek.

Rešitev naloge 2

Zniževanje temperature

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$T(e) = k \cdot e + d$

$T(0) = 25 \;\Rightarrow\; d = 25$
$5 = k \cdot 40 + 25 \;\Rightarrow\; k = -0{,}5$

$T(e) = -0{,}5 \cdot e + 25$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta parametra *k* in *d* pravilno določena.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$d = 25 \;\Rightarrow\;$ temperatura na notranji strani stene znaša 25 °C
$k = -0{,}5 \;\Rightarrow\;$ temperatura pojema za 0,5 °C na cm (stene)

Možen postopek:
$d = 20 = T_n \;\Rightarrow\;$ npr. $T_z = 30$; temperaturna razlika med notranjo stranjo stene in zunanjo stranjo stene znaša 10 $\Rightarrow\; k = 0{,}25$, s tem se temperatura spremeni za 0,25 °C na cm.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je pravilno pojasnjen pomen parametrov *k* in *d* pri navedbi merskih enot in so navedene možne vrednosti za *k* in T_z. Postopek mora biti razumljivo pojasnjen, pri čemer mora biti na vsak način za T_z izbrana vrednost večja od 20.

Naloga 3

Razvoj rastline

V nekem rastlinjaku opazujejo razvoj neke rastline, pod nadzorovanimi pogoji, v časovnem obdobju 20 tednov. Ob začetku opazovanja ima rastlina višino 10 cm. Med prvimi 5 tedni je ugotovljeno, da se je višina rastline povečala za 15 % na teden. Po preteku prvih 5 tednov se pogoji v rastlinjaku spremenijo.

Zastavitev naloge:

V prvih 5 tednih je moč višino rastline modelirati s funkcijo f. Pri tem podaja $f(t)$ višino rastline v cm t tednov po od začetku opazovanja.

Navedite enačbo funkcije f in izračunajte višino rastline 5 tednov po začetku opazovanja.

Nadaljevalno vprašanje:

V naslednji preglednici je navedena višina rastline ob nekaj nadaljnjih časovnih trenutkih.

število preteklih tednov (od začetka opazovanja)	višina rastline (v cm, zaokroženo na mm)
7	22,7
11	25,2
20	29,8

Gerhard zatrjuje, da razvoj rastline glede na predložene podatke, po preteku prvih 5 tednov, več ne poteka eksponentno.

Navedite, če je ta izjava pravilna ali napačna ter, s pomočjo ustreznega izračuna, utemeljite svojo izjavo.

Rešitev naloge 3

Razvoj rastline

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$f(t) = 10 \cdot 1{,}15^t$

$f(5) = 10 \cdot 1{,}15^5 \approx 20{,}1$

Po 5 tednih znaša višina rastline ca. 20,1 cm.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je navedena pravilna enačba za f in je pravilno izračunana višina rastline po 5 tednih.
Tolerančni interval: [20,0 cm; 20,2 cm]
Tudi ekvivalentne enačbe za f (npr. v obliki $f(t) = 10 \cdot e^{0{,}13976\ldots \cdot t}$) je vrednotiti kot pravilne.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Gerhardova izjava je pravilna, ker po preteku prvih 5 tednov ne obstajajo konstantne tedenske stopnje rasti (zlasti ne 15 % stopnja rasti).

Možen izračun:

Tedenski odstotni prirastek (relativna sprememba) znaša:

- v časovnem intervalu [5; 7]: $\sqrt{\frac{22{,}7}{20{,}1}} = 1{,}0627\ldots$ ⇒ tedenska stopnja rasti: ca. 6,3 %
- v časovnem intervalu [7; 11]: $\sqrt[4]{\frac{25{,}2}{22{,}7}} = 1{,}0264\ldots$ ⇒ tedenska stopnja rasti: ca. 2,6 %
- v časovnem intervalu [11; 20]: $\sqrt[9]{\frac{29{,}8}{25{,}2}} = 1{,}0188\ldots$ ⇒ tedenska stopnja rasti: ca. 1,9 %

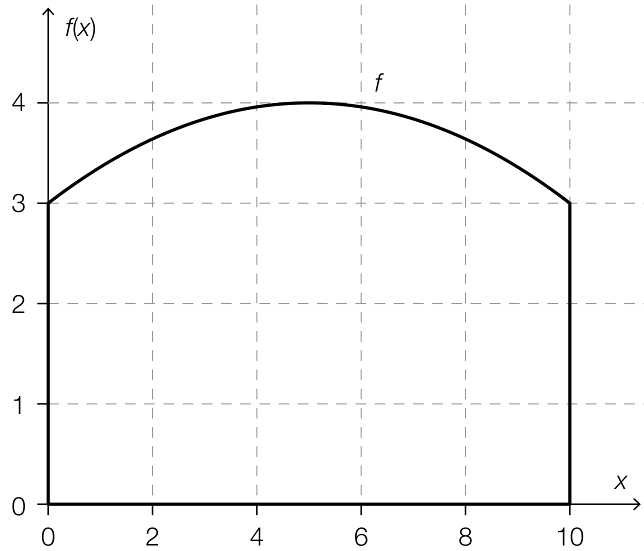
Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je pravilnost izjave navedena in z izračunom pravilno utemeljena.
Tudi druge korektne utemeljitve (ki se opirajo na ustrezni izračun), je vrednotiti kot pravilne.

Naloga 4

Ploskev stene

Ploskev neke stene ima tri ravne meje, ki jih lahko modeliramo z x-osjo, navpično osjo in premico z enačbo $x = 10$. Četrto mejo lahko modeliramo s polinomsko funkcijo f druge stopnje, z enačbo $f(x) = -0{,}04 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 3$. Naslednja slika modelno prikazuje potek meja te stene (dimenzije v metrih).



Zastavitev naloge:

Navedite primitivno funkcijo (*prvotno funkcijo*) F funkcije f in določite ploščino ploskve opisane stene s pomočjo te primitivne funkcije.

Nadaljevalno vprašanje:

Ploskev stene je potrebno po delih pobarvati z različnimi barvami.

Različica 1:

Ploskev stene je potrebno z dvema premicama, vzporednima z navpično osjo, razdeliti na tri ploščinsko enake dele.

Pokažite, da ima prva premica enačbo $x = 3{,}46$ in navedite enačbo druge premice.

Različica 2

Ploskev stene je potrebno s premico, vzporedno z x-osjo, na višini h razdeliti na dva ploščinsko enaka dela.

Izračunajte h.

Rešitev naloge 4

Ploskev stene

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

možna primitivna funkcija: $F(x) = -\frac{0{,}04 \cdot x^3}{3} + 0{,}2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$

$F(10) - F(0) = \frac{110}{3} \approx 36{,}67 \;\Rightarrow\;$ ploščina stene znaša ca. 36,67 m^2.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je pravilno navedena primitivna funkcija F funkcije f in s pomočjo te primitivne funkcije pravilno določena ploščina stene.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Različica 1:
$\int_0^{3{,}46} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{110}{9}$ in to ustreza tretjini zgoraj izračunane ploščine stene.
Enačba druge premice: $x = 10 - 3{,}46$ oz. $x = 6{,}54$

Različica 2:
$10 \cdot h = \frac{110}{6} \;\Rightarrow\; h = \frac{11}{6} \approx 1{,}83$

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko sta za različico 1 navedena pravilen dokaz in pravilna enačba druge premice, kakor tudi za različico 2 pravilno izračunana višina h.
tolerančni interval za drugo navpično premico: [6,5; 6,6]
tolerančni interval za višino h: [1,8; 1,9]

Naloga 5

Multiple-choice-test

Pri nekem multiple-choice-testu z desetimi nalogami je vsakič po pet možnosti odgovora, od katerih je vedno natanko en odgovor pravilen.

Patrick mora ugibati in naredi pri vsaki nalogi križec pri poljubno izbrani možnosti odgovora.

Zastavitev naloge:

Interpretirajte vsak seštevanec (sumand) izraza $1 - (0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \cdot 45 + 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10})$ v danem kontekstu in navedite dogodek, čigar verjetnost se izračuna s tem izrazom.

Nadaljevalno vprašanje:

Da je test opravljen, mora biti pravilno rešenih več kot polovica nalog.

Yvonne reši štiri naloge pravilno, pri preostalih nalogah mora ugibati in vsakič naredi križec pri poljubno izbrani možnosti odgovora.

Navedite izraz za izračun verjetnosti, da Yvonne test opravi, ter pojasnite svoj postopek.

Rešitev naloge 5

Multiple-choice-test

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Verjetnost, da je naloga pravilno rešena, znaša 0,2.
Sumand $0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \cdot 45$ navaja verjetnost, da sta natanko dve vprašanji odgovorjeni pravilno, srednji sumand navaja verjetnost, da je pravilno odgovorjeno natanko eno vprašanje in sumand $0{,}8^{10}$ navaja verjetnost, da nobeno vprašanje ni odgovorjeno pravilno.

Dogodek, čigar verjetnost se s tem izrazom računa, se glasi: Patrik pravilno reši vsaj tri naloge.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je vsak sumand (smiselno) pravilno interpretiran in (smiselno) pravilno naveden dogodek.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$1 - (0{,}8^5 \cdot 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}8^6)$

Yvonne opravi test, če pri vsaj dveh od preostalih šestih vprašanj naredi križec pri pravilnem odgovoru.
Izračun lahko poteka s pomočjo nasprotne verjetnosti:
$1 - (P(\text{»pravilen odgovor«}) + P(\text{»nepravilen odgovor«}))$

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je naveden pravilen izraz in pojasnjen pravilen postopek.
Ekvivalentne izraze je vrednotiti kot pravilne.

Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

maj 2017

Matematika

Kompenzacijski izpit 6

Podatki za **izpraševalce / izpraševalke**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence (*Grundkompetenzen*), pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju (*Kommunikationsfähigkeit*).

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko (*Grundkompetenzpunkt*), z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko (*Leitfragenpunkt*). Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		najmanjše število doseženih točk
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Ekvivalenčna preoblikovanja

Za $x \in \mathbb{R}$ sta dani dve enačbi:

- $3 - \frac{2x}{5} = -1$
- $\frac{3x}{5} + 1 = x - 3$

Zastavitev naloge:

Navedite, ali sta ti dve enačbi ekvivalentni.

Za primer, da sta ti dve enačbi ekvivalentni, navedite možna ekvivalenčna preoblikovanja za prevod prve enačbe v drugo enačbo.
Če enačbi nista ekvivalentni, utemeljite zakaj je temu tako.

Nadaljevalno vprašanje:

Sklicujoč se na spodaj navedeni primer, konkretno pojasnite, zakaj pri prikazanem preoblikovanju ne gre za ekvivalenčno preoblikovanje. Osnovna množica je množica realnih števil.

$(x - 2)^2 = 25 \ | \ \sqrt{\ }$
$x - 2 = 5$

Rešitev naloge 1

Ekvivalenčna preoblikovanja

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Ti dve enačbi sta ekvivalentni.

Možna ekvivalenčna preoblikovanja:
Potem ko odštejemo število 2, dobimo enačbo $1 - \frac{2x}{5} = -3$.
Ko nato prištejemo x, dobimo $1 + \frac{3x}{5} = -3 + x$, in s tem dobimo drugo enačbo.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta enačbi razpoznani kot ekvivalentni in so pravilno navedena možna ekvivalenčna preoblikovanja.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Prva enačba ima rešitvi –3 in 7, druga pa samo eno rešitev, namreč 7. Enačbi potemtakem nimata enake množice rešitev, in torej nista ekvivalentni.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je (smiselno) pravilno pojasnjeno zakaj enačbi nista ekvivalentni.

Naloga 2

Ohlajanje

Posoda z vročo vodo je v časovnem trenutku $t_0 = 0$ postavljena na prosto pri zunanji temperaturi 0 °C. Temperatura $T(t)$ (v °C) vode je odvisna od časa t (v minutah) in jo je moč opisati s funkcijo T pri $T(t) = 90 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$.

Zastavitev naloge:

Določite razpolovni čas za ta proces ohlajanja in pojasnite to vrednost v danem kontekstu.

Nadaljevalno vprašanje:

Pokažite, da je trenutna vrednost spreminjanja temperature vode $T'(t)$ premo sorazmerna trenutni temperaturi vode v časovnem trenutku t in navedite sorazmernostni faktor k.

$k =$ ____

Navedite kakšen pomen ima za proces ohlajanja absolutna vrednost od T'.

Rešitev naloge 2

Ohlajanje

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$45 = 90 \cdot e^{-0,2 \cdot t} \;\Rightarrow\; t \approx 3,5$

Po ca. 3,5 minutah je temperatura vode padla na polovico izhodiščne vrednosti (od 90 °C na 45 °C).

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je razpolovni čas pravilno določen in navedeno (smiselno) pravilno pojasnilo.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$T'(t) = 90 \cdot (-0,2) \cdot e^{-0,2 \cdot t} = -0,2 \cdot T(t)$
$k = -0,2$

Absolutna vrednost od T' podaja hitrost ohlajanja.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je pokazana prema sorazmernost in pravilno določen sorazmernostni faktor (tudi $k = -5$ je vrednotiti kot pravilno, ker velja: $T(t) = -5 \cdot T'(t)$). Nadalje mora biti (smiselno) pravilno naveden pomen za T'.

Naloga 3

Cena surove nafte

Decembra 2015 je cena surove nafte dnevno tendenčno padala. Cena surove nafte se navaja v US-dolarjih, nanašajoč se na *sodček* (angl. *barrel*), pri čemer vsebuje en sodček 159 litrov.

1. decembra 2015 ob 12:00 uri je znašala cena surove nafte 41,70 US-dolarjev na sodček,
11. decembra 2015 ob 12:00 uri je cena znašala 37,94 na sodček.

Zastavitev naloge:

Navedite absolutno in relativno (odstotno) spremembo cene surove nafte na sodček za navedeno časovno obdobje.

Nadaljevalno vprašanje:

Izračunajte srednjo hitrost spreminjanja cene surove nafte <u>na liter</u> v navedenem časovnem obdobju (v dnevih) in svoj rezultat interpretirajte v dani povezavi.

Navedite, kakšno ceno bi imel 1 liter surove nafte 16. decembra 2015, če bi se cena od 11. decembra 2015 dalje razvijala z enako srednjo hitrostjo spreminjanja na dan.

Rešitev naloge 3

Cena surove nafte

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

absolutna sprememba: –3,76 US-dolarjev na sodček
relativna sprememba: –9 % oz. –0,09

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta obe vrednosti pravilno navedeni. Tudi navedba pozitivnih vrednosti (3,76 US-dolarjev in 9 %) je veljavna, če je verbalno enoznačno pokazano, da gre za zmanjšanje.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možna rešitev:

povprečna hitrost spreminjanja: $\dfrac{\frac{37{,}94}{159} - \frac{41{,}7}{159}}{10} \approx -0{,}00236$

Cena surove nafte na liter je v tem časovnem obdobju padla za povprečno 0,00236 US-dolarjev na dan.
Cena na liter 16. 12. 2015 pri opisanem razvoju: $\frac{37{,}94}{159} - 5 \cdot 0{,}00236 \approx 0{,}2268$
Cena na liter bi znašala ca. 0,2268 US-dolarjev.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je pravilno navedena in (smiselno) pravilno interpretirana povprečna hitrost naraščanja cene surove nafte na liter, ter pravilno navedena cena surove nafte na liter za 16. 12. 2015.
Tolerančni interval za povprečno hitrost spreminjanja: [–0,0024; –0,002]
Tolerančni interval za ceno na liter: [0,22; 0,23]

Naloga 4

Integral

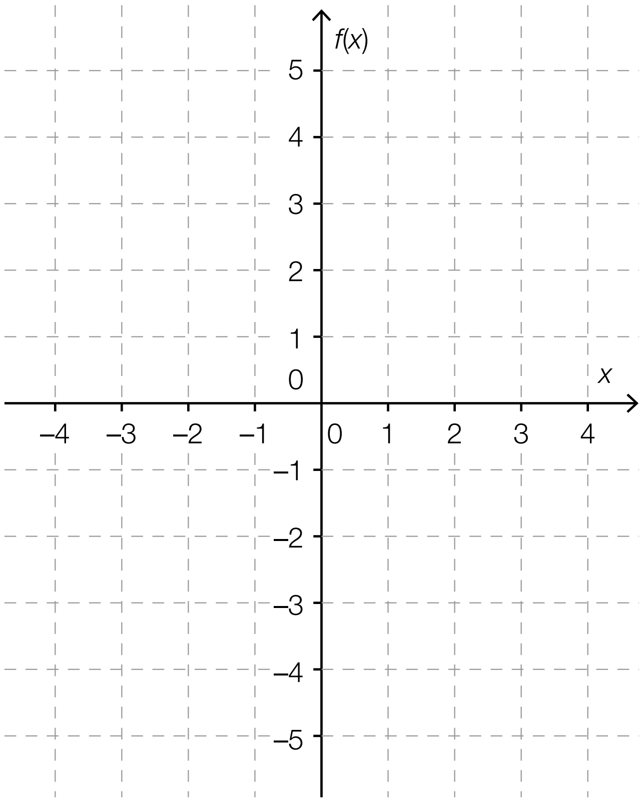
Dana je linearna funkcija f pri $f(x) = -2 \cdot x + 2$.

Zastavitev naloge:

Navedite enačbo tiste primitivne funkcije (*prvotne funkcije*) F funkcije f, za katero velja $F(2) = 1$ in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Določite vrednost določenega integrala $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ in pojasnite svoj postopek.
V naslednjem koordinatnem sistemu predstavite graf funkcije f in pojasnite, zakaj se v tem primeru vrednost določenega integrala ne ujema s ploščino tiste ploskve, ki jo na intervalu [0; 3] graf funkcije oklepa z x osjo.



Rešitev naloge 4

Integral

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možna pot reševanja:
Za vse primitivne funkcije velja: $F(x) = -x^2 + 2 \cdot x + c$.
Zaradi $F(2) = 1$ velja: $-2^2 + 2 \cdot 2 + c = 1 \Rightarrow c = 1$.
S tem: $F(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 1$.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je navedena pravilna enačba za F in pojasnjen pravilen postopek.

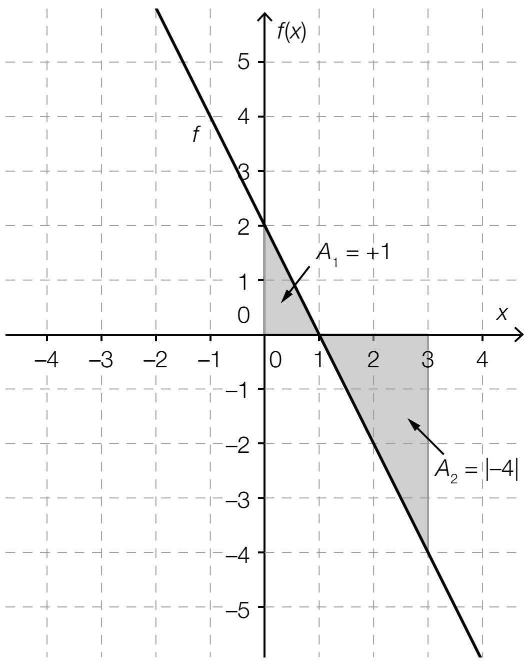
Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Velja:
$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (-2 \cdot x + 2)\,\mathrm{d}x = (-x^2 + 2 \cdot x)\Big|_0^3 = -3$ oz. $F(3) - F(0) = -2 - 1 = -3$

Možna razlaga:
Pri računanju ploščin je treba upoštevati, da je integral funkcije pri tistih delih ploskve, ki ležijo pod x-osjo, negativen. Zato mora izračun ploščine potekati odsekoma, ob upoštevanju lege delnih ploskev.

$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + (-4) = -3$

Ploščina:
$A_1 + A_2 = 1 + |-4| = 5$



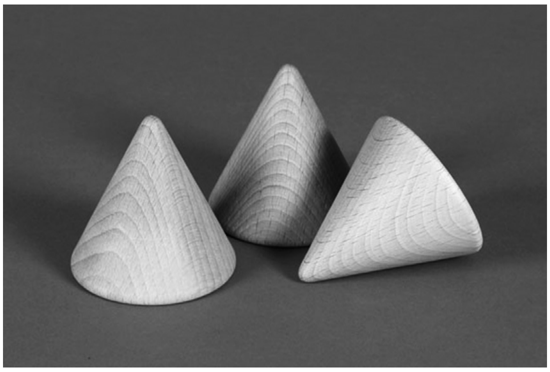
Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno določena vrednost integrala, naveden pravilen postopek, pravilo predstavljen graf in navedeno (smiselno) pravilno pojasnilo.

Naloga 5

Stožec

Stožec, ki ga vržemo, lahko pade tako, da leži na plašču ali na osnovni ploskvi.



Vir slike: http://www.holzbausteine.at/images/Spitzkegel60.jpg [28.04.2016].

Zastavitev naloge:

Met takega stožca opazujmo kot slučajni poskus. Stožec najprej vržemo 50 krat. Pri tem v 12 primerih pade tako, da leži na osnovni ploskvi.

Felix navede naslednji račun:

$$\left(\frac{12}{50}\right)^2 = \frac{144}{2\,500} = 0{,}0576 = 5{,}76\ \%$$

Interpretirajte rezultat v dani povezavi.

Nadaljevalno vprašanje:

Selin zatrjuje, da verjetnost, s katero stožec pade tako, da leži na osnovni ploskvi, pravzaprav sploh ni znana.

Navedite, kateri argument lahko uporabi za utemeljitev svoje trditve in kako moramo slučajni poskus spremeniti, da bi lahko čim bolj natančno določili to verjetnost.

Rešitev naloge 5

Stožec

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Verjetnost, da pri dvakratnem metu stožca le-ta pri obeh metih pade tako, da leži na osnovni ploskvi, znaša 5,76 % (pri predpostavki, da znaša verjetnost, da stožec pade tako, da leži na osnovni ploskvi, $\frac{12}{50}$).

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je v dani povezavi navedena (smiselno) pravilna interpretacija.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Relativna frekvenca daje samo oceno za verjetnost.
Če slučajni poskus izvedemo samo 50 krat, je z navedbo relativne frekvence verjetnost le zelo nenatančno aproksimirana.
Da bi dobili natančnejšo oceno verjetnosti, moramo slučajni poskus izvesti v veliko večjem številu ponovitev.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je naveden odgovor, ki (smiselno) ustreza pričakovani rešitvi.

Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

maj 2017

Matematika

Kompenzacijski izpit 7

Podatki za **izpraševalce / izpraševalke**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence (*Grundkompetenzen*), pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju (*Kommunikationsfähigkeit*).

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko (*Grundkompetenzpunkt*), z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko (*Leitfragenpunkt*). Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		najmanjše število doseženih točk
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Kvadratna enačba

Za $x \in \mathbb{R}$ je dana enačba $x^2 + a \cdot x = 15$ pri $a \in \mathbb{R}$.

Zastavitev naloge:

Določite a tako, da bo $x_1 = -5$ ena od obeh rešitev enačbe.

Nadalje izračunajte drugo rešitev x_2 te enačbe in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Vsakič od primerov navedite vse vrednosti za a, pri katerih ima enačba natanko eno rešitev, nobene rešitve oz. dve rešitvi, ter vsakič pojasnite izbiro vrednosti za a.

Rešitev naloge 1

Kvadratna enačba

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$(-5)^2 + a \cdot (-5) = 15 \;\Rightarrow\; a = 2$

$x^2 + 2 \cdot x = 15 \;\Rightarrow\; x_2 = 3$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta a in x_2 pravilno določena.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Da ima dana enačba natanko eno rešitev, mora biti diskriminanta enaka nič:

$\frac{a^2}{4} + 15 = 0$

$a^2 = -60$

Enačba $a^2 = -60$ v realnih številih nima rešitve, zato ne obstoja nobena vrednost za a, tako da bi imela dana enačba natanko eno rešitev.

Da dana enačba nima rešitve, mora veljati:

$a^2 < -60$

Ni takega realnega števila, ki bi ustrezalo tej neenačbi. Zaradi tega ni nobenih vrednosti za a takšnih, da dana enačba ne bi imela rešitve.

Da ima dana enačba dve rešitvi, mora veljati:

$a^2 > -60$

Ta neenačba je izpolnjena za vse realne vrednosti. Zato ima dana enačba pri vsaki vrednosti a natanko dve rešitvi.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če so za vse tri primere pravilno navedene in (smiselno) pravilno pojasnjene vrednosti za a.

Naloga 2

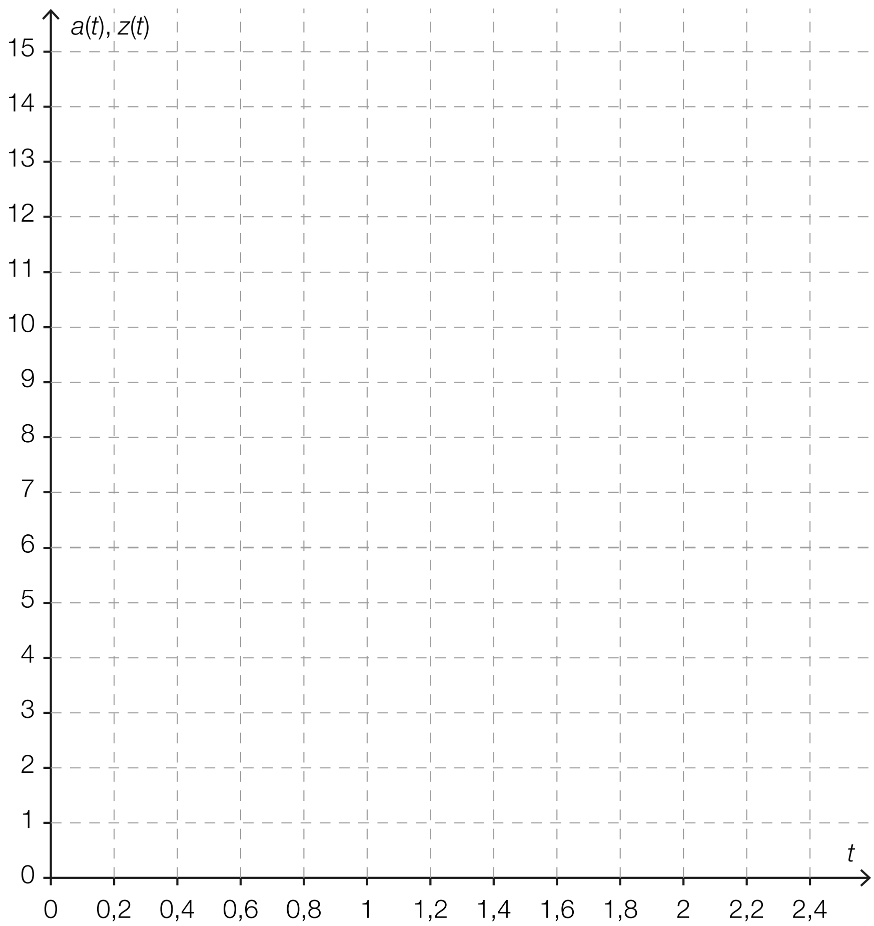
Vmesni rezervoar

V časovnem trenutku $t = 0$ se v nekam vmesnem zbiralniku nahaja 1000 m^3 vode. Vmesni zbiralnik ima dovod in odtok.

Hitrost dotoka z je opisana z enačbo $z(t) = 3 \cdot t + 4$.
Hitrost odtoka a je opisana z enačbo $a(t) = 2 \cdot t + 5$. Pri tem se $z(t)$ in $a(t)$ merita v m^3/h in t v urah.

Zastavitev naloge:

V naslednjem koordinatnem sistemu predstavite grafa funkcij z in a.



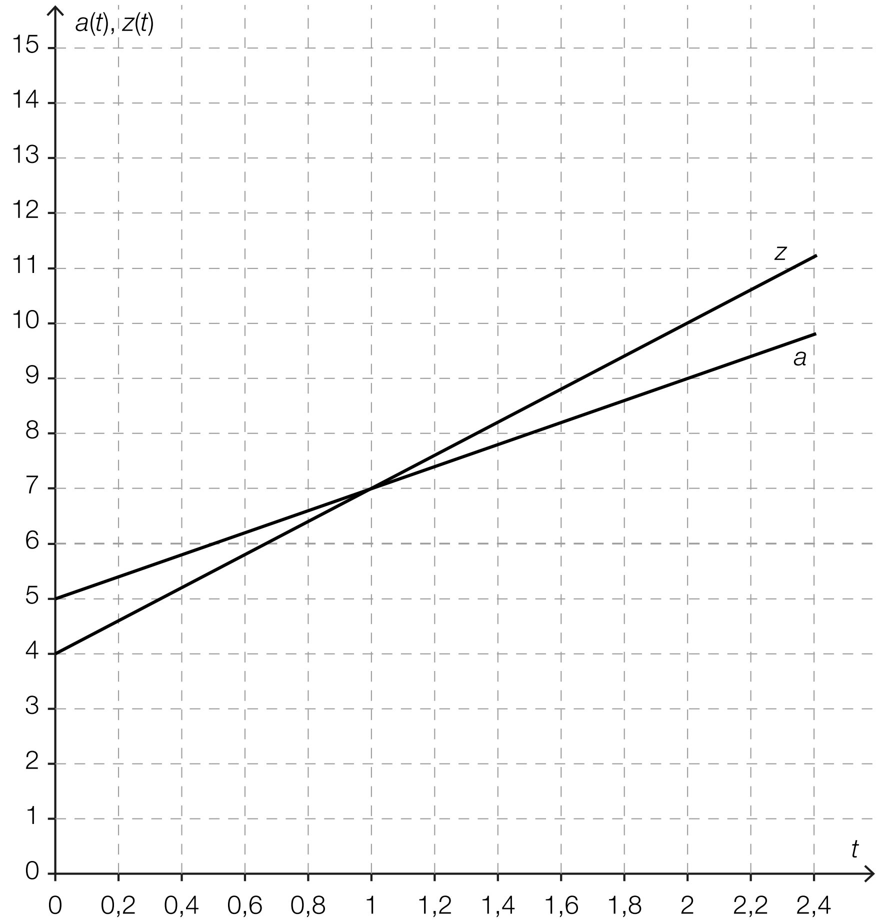
Nadaljevalno vprašanje:

Nastavite enačbo tiste funkcije V, ki v vsakem časovnem trenutku podaja količino vode v vmesnem zbiralniku.

Rešitev naloge 2

Vmesni rezervoar

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:



Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta pravilno narisana oba grafa (ki se sekata v točki (1|7)).

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Razlika med hitrostjo dotoka in hitrostjo odtoka je:
$z(t) - a(t) = t - 1$.

$\Rightarrow \; V(t) = 1\,000 + \frac{t^2}{2} - t$

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je pravilno določena enačba funkcije V in pojasnjen pravilen postopek.

Naloga 3

Mera spremembe

Če neko telo vržemo navpično navzgor, je moč višino telesa nad tlemi približno opisati s funkcijo h z enačbo $h(t) = -5 \cdot t^2 + 30 \cdot t + 2$. Pri tem je $h(t)$ višina telesa nad tlemi v metrih (m) in t čas v sekundah (s), ki je potekel po metu.

Zastavitev naloge:

Ugotovite absolutno in relativno (odstotno) spremembo funkcije h v časovnem intervalu [0 s; 2 s] in pojasnite rezultata v danem kontekstu.

Nadaljevalno vprašanje:

Ugotovite povprečno mero spremembe (*mittlere Aenderungsrate*) funkcije h na enoto spremembe neodvisne spremenljivke v časovnem intervalu [0 s; 2 s] in pojasnite rezultat glede na gibanje telesa.

Določite tisti časovni trenutek t_0, pri katerem je trenutna mera spremembe (*momentane Aenderungsrate*) funkcije h enaka povprečni meri spremembe funkcije na enoto spremembe neodvisne spremenljivke v časovnem intervalu [0 s; 2 s] in pojasnite rezultat glede na gibanje telesa.

Rešitev naloge 3

Mera spremembe

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$h(2) - h(0) = 42 - 2 = 40$
V prvih dveh sekundah višina naraste za 40 m.

$\frac{h(2) - h(0)}{h(0)} = 20$

Možna tolmačenja:

Višina je v prvih dveh sekundah narastla za 2 000 %.

ali:

V obeh prvih sekundah je višina narastla za 20 kratnik.

ali:

Po dveh sekundah je višina 21 krat tolikšna kot na začetku.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta obe meri spremembe pravilno navedeni in (smiselno) pravilno pojasnjeni.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = 20$ m/s
Povprečna hitrost telesa v prvih dveh sekundah znaša 20 m/s.

$h'(t) = -10 \cdot t + 30$
$h'(t_0) = 20 \ \Rightarrow\ -10 \cdot t_0 + 30 = 20 \ \Rightarrow\ t_0 = 1$
Trenutna hitrost telesa v časovnem trenutku $t_0 = 1$ je enaka povprečni hitrosti telesa v časovnem intervalu [0 s; 2 s].

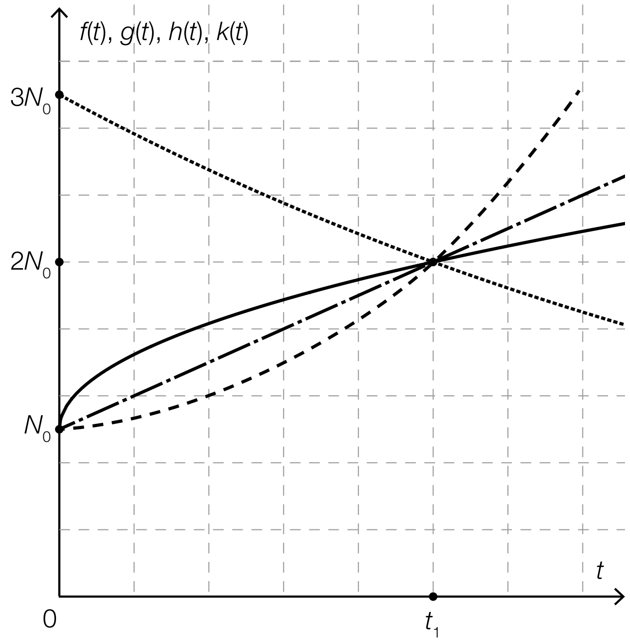
Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, če je povprečna hitrost pravilno določena in pojasnjena. Nadalje mora biti pravilno določen časovni trenutek t_0 in navedeno (smiselno) pravilno tolmačenje.

Naloga 4

Grafi funkcij

V nadaljevanju so predstavljeni grafi štirih funkcij f, g, h in k.



Zastavitev naloge:

Za te štiri funkcije f, g, h in k veljajo za vse $t \in (0; t_1)$ naslednje izjave

- $f''(t) = 0$ in $f'(t) > 0$
- $g''(t) > 0$ in $g'(t) > 0$
- $h''(t) < 0$ in $h'(t) > 0$
- $k''(t) > 0$ in $k'(t) < 0$

Grafe na gornji sliki pravilno označite z f, g, h in k in utemeljite svoje odločitve.

Nadaljevalno vprašanje:

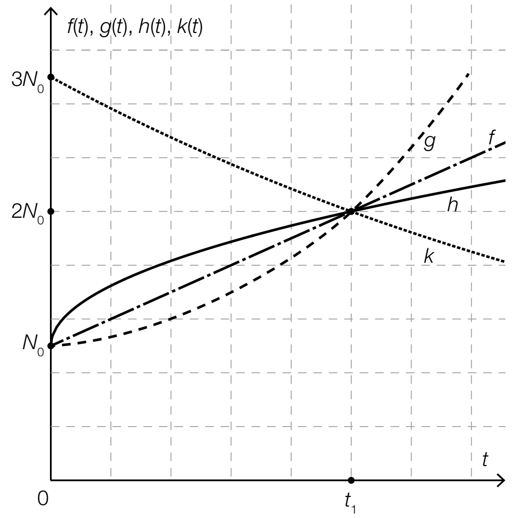
Ob uporabi N_0 in t_1 sestavite funkcijsko enačbo funkcije f v odvisnosti od t in pojasnite svoj postopek.

Navedite, če je za funkcijo f izjava: »Podvojitveni čas je konstanten.« pravilna ali napačna, in utemeljite svojo odločitev.

Rešitev naloge 4

Grafi funkcij

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:



$f''(t) = 0 \;\Rightarrow\;$ Graf funkcije f ima ukrivljenost nič (je premica).
$g''(t) > 0$ in $g'(t) > 0 \;\Rightarrow\;$ Graf funkcije g je levo ukrivljen (pozitivno ukrivljen) in strogo monotono naraščajoč.
$h''(t) < 0 \;\Rightarrow\;$ Graf funkcije h je desno ukrivljenima (negativno ukrivljen).
$k''(t) > 0$ in $k'(t) < 0 \;\Rightarrow\;$ Graf funkcije k je levo ukrivljen (pozitivno ukrivljen) in strogo monotono padajoč.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko so grafi pravilno označeni in je vsakič navedena (smiselno) pravilna utemeljitev.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Funkcija f je linearna funkcija, katere graf poteka skozi točki $(0|N_0)$ in $(t_1|2N_0)$.
Zato velja: $f(t) = \frac{N_0}{t_1} \cdot t + N_0$
Izjava »Podvojitveni čas je konstanten.« je napačna.

Možna utemeljitev:

V časovnem intervalu $[0; t_1]$ se sicer podvoji funkcijska vrednost iz N_0 na $2N_0$ v nasprotju s tem pa v časovnem intervalu $[t_1; 2t_1]$ funkcijska vrednost naraste od $2N_0$ na $3N_0$. Se torej ne podvoji.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je funkcijska enačba funkcije f pravilno navedena in pojasnjen pravilen postopek. Nadalje mora biti izjava razpoznana za napačno in le-to (smiselno) pravilno utemeljeno.

Naloga 5

Krogle

V neki žari se nahaja deset črnih in pet belih krogel.

Zastavitev naloge:

David najprej iz žare izvleče eno črno kroglo. Nato po naključnem principu izvleče še eno nadaljnjo kroglo, ne da bi dal prvo kroglo nazaj.
Določite verjetnost P_1, da je tudi druga izvlečena krogla črna in pojasnite svoj postopek.

Leo izvleče (zopet izmed vseh 15 krogel) po naključnem principu iz žare zaporedoma dve krogli, brez vračanja krogel.
Določite verjetnost P_2, da je druga izvlečena krogla črna in pojasnite svoj postopek.

Nadaljevalno vprašanje:

Za nek naključni poskus uporabimo poleg žare, ki je omenjena v uvodu, še neko drugo žaro, v kateri je deset belih in pet črnih krogel.

David mora po naključnem principu izbrati eno od obeh žar in nato po naključnem principu iz izbrane žare izvleči dve krogli.
Določite verjetnost P_3, da sta obe izvlečeni krogli črni.

Leo izvede enak naključni poskus, vendar sme krogle v žare razporediti drugače, da bi povečal verjetnost, da izvleče (zaporedoma, brez vračanja) dve črni krogli.
V ta namen postavi vse črne krogle v prvo žaro in vse bele v drugo žaro.

Računsko preverite, če ima Leo s tem za izvlečenje dveh črnih krogel boljše možnosti kot David.

Rešitev naloge 5

Krogle

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$P_1 = \frac{9}{14} \approx 0{,}643 = 64{,}3\ \%$

Možno pojasnilo:

Če vemo, da je prva izvlečena kroga črna, se v žari nahaja med 14 preostalimi kroglami samo še 9 črnih krogel.

Za Lea so ugodni izidi poskusa: črno-črno oz. belo-črno.

Možen izračun:

$P_2 = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667 = 66{,}7\ \%$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta obe verjetnosti pravilno določeni in vsakič pojasnjen (smiselno) pravilen postopek.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$P_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{11}{42} \approx 0{,}2619 = 26{,}19\ \%$

Verjetnost, da Leo pri svojem slučajnem poskusu izvleče dve črni krogli:

$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\ \%$

Leove možnosti, da izvleče dve črni krogli, so bistveno višje.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno določena verjetnost P_3 in je računsko dokazano, da ima Leo boljše možnosti, da izvleče dve črni krogli.

Izvod za izpraševalce/-lke

Kompenzacijski izpit k standardiziranemu,
kompetenčno usmerjenemu
pisnemu zrelostnemu izpitu

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

junij 2016

Matematika

Kompenzacijski izpit 9
Podatki za izpraševalce / izpraševalke

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Navodila za reševanje nalog

Izravnalna izpitna pola, ki je pred Vami, vsebuje pet nalog. Naloge so za reševanje med seboj neodvisne.

Vsaka naloga je razčlenjena v dva dela. Pri »Zastavitvi naloge« mora kandidatka / kandidat dokazati vsakokratne osnovne kompetence (*Grundkompetenzen*), pri odgovarjanju »Nadaljevalnega vprašanja« pa kandidatka/kandidat dokazuje svojo sposobnost komunikacije na danem področju (*Kommunikationsfähigkeit*).

Izpraševalci(-lke) najdejo v nadaljevanju opisa nalog in zastavitev vprašanj tudi navedbo pričakovanj v zvezi z rešitvami in ključ za ocenjevanje.

Čas za pripravo znaša najmanj 30 minut, čas za izpraševanje pa največ 25 minut.

Vrednotenje

Vsaka naloga bo ovrednotena z nič, eno ali dvema točkama. Pri tem je za vsako zastavitvijo naloge moč doseči po eno osnovnokompetenčno točko (*Grundkompetenzpunkt*), z vsakim nadaljevalnim vprašanjem pa po eno dodatno točko (*Leitfragenpunkt*). Skupaj je lahko doseženih največ deset točk.

Za vrednotenje (oceno) izpita velja naslednja shema:

ocena		najmanjše število doseženih točk
»Genügend«	zadostno	4 osnovnokompetenčne točke + 0 dodatnih točk 3 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka
»Befriedigend«	povoljno	5 osnovnokompetenčnih točk + 0 dodatnih točk 4 osnovnokompetenčne točke + 1 dodatna točka 3 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki
»Gut«	dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 1 dodatna točka 4 osnovnokompetenčne točke + 2 dodatni točki 3 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke
»Sehr gut«	prav dobro	5 osnovnokompetenčnih točk + 2 dodatni točki 4 osnovnokompetenčne točke + 3 dodatne točke

O skupni oceni odloča izpitna komisija; na vsak način se pri oceni upoštevata tako uspeh, ki ga je kandidatka/kandidat dosegla(-el) pri izravnalnem izpitu, kakor tudi rezultat pisnega dela izipta.

Ocenjevalna tabela za kompenzacijski

Naslednja ocenjevalna tabela je po želji na voljo za uporabo in služi kot pripomoček pri vrednotenju.

	doseženih osnovnokompetenčnih točk	doseženih dodatnih točk
naloga 1		
naloga 2		
naloga 3		
naloga 4		
naloga 5		

Naloga 1

Premice v $\mathbb{R}^3$

Dani sta dve premici, g in h, v $\mathbb{R}^3$.

Premica g poteka skozi točko $P = (3|1|5)$ in je vzporedna z navpično osjo y.

Zastavitev naloge:

Navedite parametrično predstavitev za g.

Utemeljite, zakaj koordinat y_Q in z_Q točke $Q = (1|y_Q|z_Q)$ ni možno določiti tako, da bi točka Q ležala na premici g.

Nadaljevalno vprašanje:

Podajte pregled vseh možnih medsebojnih leg dveh premici v $\mathbb{R}^3$!

Premica h je podana v parametrični obliki $X = \begin{pmatrix} x_h \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ y_h \\ 1 \end{pmatrix}$ pri $s, x_h, y_h \in \mathbb{R}$.

Ali je možno številski vrednosti x_h in y_h določiti tako, da sta premici g in h med seboj pravokotni in se sekata v točki P?
Če ne, utemeljite s pomočjo računov, zakaj to ni možno.
Če ja, navedite ustrezni vrednosti za x_h in y_h.

Rešitev naloge 1

Premice v $\mathbb{R}^3$

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možna parametrična predstavitev:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pri } t \in \mathbb{R}$$

Možna utemeljitev:
Za vse točke na premici g velja:
$x = 3$; $y = 1 + t$; $z = 5$ (pri $t \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$ Neka točka z $x = 1$ ne more ležati na premici g.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je podana pravilna parametrična predstavitev za g in navedena pravilna utemeljitev.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Dve premici v $\mathbb{R}^3$ sta lahko identični, vzporedni, se sekata ali sta mimobežni.

Številski vrednosti x_h in y_h je možno določiti tako, da sta izpolnjena oba navedena pogoja:

$x_h = -1$ (dobimo pri vrednosti parametra $s = 2$)

$y_h = 0$ (dobimo iz $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$)

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko so navedene vse možne lege in pravilno podane vrednosti za x_h in y_h.

Naloga 2

Kvadratna funkcija

Dana je funkcija f z $f(x) = r \cdot x^2 + s$ pri $r, s \in \mathbb{R}, r \neq 0$.

Zastavitev naloge:

Pojasnite, kako vpliva sprememba vrednosti parametrov r in s na potek grafa funkcije f.

Nadaljevalno vprašanje:

Graf funkcije f poteka skozi obe točki, $B = (a|b)$ in $E = (0|e)$ pri $a \neq 0$.

S pomočjo koordinat a, b, e danih točk navedite parametra r in s.

Navedite, za katero vrednost b funkcija f ni kvadratna funkcija.

Rešitev naloge 2

Kvadratna funkcija

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Pri $r > 0$ gre za navzgor odprto parabolo, pri $r < 0$ gre za navzdol odprto parabolo. Čim večja je absolutna vrednost *r*, tem bolj »strmo« poteka graf funkcije *f*.

Sprememba parametra *s* povzroči vzporedni premik parabole vzdolž navpične osi.

ali:

Teme parabole je v točki $(0|s)$.

ali:

$(0|s)$ je presečišče grafa z navpično osjo.

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je učinek spremembe vrednosti parametrov *r* in *s* na potek grafa funkcije *f* (smiselno) pravilno utemeljen (pojasnjen).

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Ker ležita *B* in *E* na grafu funkcije *f* in je *E* teme, velja:

$s = e$

$b = r \cdot a^2 + e \;\Rightarrow\; r = \dfrac{b - e}{a^2}$

Pri $b = e$ funkcija *f* ni kvadratna funkcija.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko sta parametra *r* in *s* pravilno navedena in je pravilno utemeljena, da mora veljati $b = e$, tako da *f* ni kvadratna funkcija.

Naloga 3

Sila vzmeti

Če raztegnemo vzmet, je sila, ki mora biti uporabljena za raztegovanje vzmeti premosorazmerna raztezku. Funkcija F opisuje silo, ki jo je potrebno uporabiti, v odvisnosti od raztezka x.

Velja: $F(x) = k \cdot x$.

Pri tem je x podan v metrih (m) in $F(x)$ v Njutnih (N). Konstanta k se označuje kot konstanta vzmeti in navaja »trdoto« vzmeti.

Zastavitev naloge:

Skicirajte enega od možnih grafov funkcije F in na Vaši skici označite k.

Nadaljevalno vprašanje:

Navedite izraz v odvisnosti od k, s katerim lahko izračunamo delo, ki je potrebno, da vzmet raztegnemo za dolžino x_0.

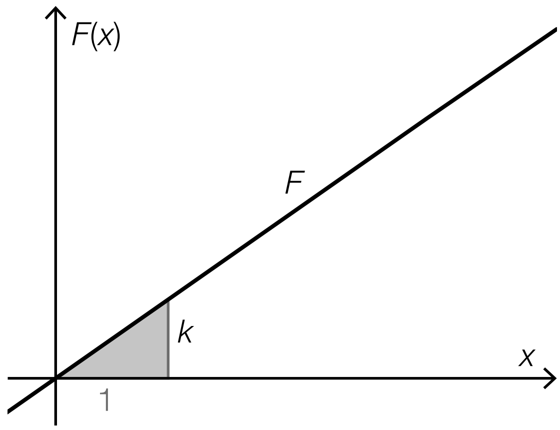
Navedite, kako se delo spremeni, če vzmet raztegnemo za dolžino $2 \cdot x_0$.

Rešitev naloge 3

Sila vzmeti

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Možna skica:



Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je predložena ustrezna skica homogene linearne funkcije in je *k* pravilno označen.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$$W = \int_0^{x_0} k \cdot x \, dx = \frac{k \cdot x_0^{\,2}}{2}$$

V primeru dvojnega raztezka velja:

$$W = \int_0^{2x_0} k \cdot x \, dx = \frac{k \cdot (2x_0)^2}{2}$$

Delo naraste na štirikratnik.

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je izraz za izračun dela pravilno naveden in pravilno opisana sprememba dela.
Ekvivalentne izraze je vrednotiti kot pravilne.

Naloga 4

Mejni stroški

Od nekega podjetja poznamo za izdelavo nekega produkta funkcijo stroškov K pri
$K(x) = 4 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 + 400 \cdot x + 1\,000$. Pri tem podaja $K(x)$ proizvodne stroške v denarnih enotah (DE) pri proizvodnji x količinskih enot (KE).

Pod mejnimi stroški (v DE/KE) razumemo stroške, ki dodatno nastanejo pri povečanju proizvodnje za 1 KE.

Zastavitev naloge:

Približnostni izračun mejnih stroškov pri neki določeni proizvodni količini x_0 dobimo s prvim odvodom $K'(x_0)$.

S pomočjo odvoda funkcije K izračunajte mejne stroške pri proizvodni količini 15 KE.

Nadaljevalno vprašanje:

Izračunajte, za koliko DE se vrednost približno izračunanih mejnih stroškov pri obsegu proizvodnje 15 KE razlikuje od dejanskega prirastka stroškov, če se obseg proizvodnje poveča od 15 KE na 16 KE.

Funkcija odvoda K' je od $x = 5$ KE dalje strogo monotono naraščajoča.
Navedite pomen te izjave za proizvodne stroške, če proizvodna količina narašča

Rešitev naloge 4

Mejni stroški

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

$K'(x) = 12 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 400$
$K'(15) = 1\,300$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko je $K'(15)$ pravilno izračunan.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

$K'(15) = 1\,300$

$K(16) - K(15) = 8\,424 - 7\,000 = 1\,424$

Vrednost približnostno izračunanih mejnih stroškov se pri $x_0 = 15$ KE razlikuje od dejanskega prirastka stroškov pri 1 KE za 124 DE.

Ta izjava pomeni, da je od proizvodne količine $x = 5$ naprej prirast stroškov progresiven (to pomeni, stroški pri naraščajoči proizvodni količini vedno močneje naraščajo).

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko je pravilno izračunana razlika stroškov in (smiselno) pravilno naveden pomen izjave.

Naloga 5

Diskretna slučajna spremenljivka

Za neko diskretno slučajno spremenljivko X je predložena preglednica, v kateri so navedene vse možne vrednosti k te slučajne spremenljivke in pripadajoče verjetnosti. Parameter n je naravno število z $n \neq 0$.

k	1	4	7	10	15
$P(X = k)$	0,2	$\frac{2}{n}$	$\frac{6}{n}$	0,1	0,3

Zastavitev naloge:

Določite parameter n in pričakovano vrednost $E(X)$ slučajne spremenljivke X.
Pojasnite svoj postopek reševanja.

Nadaljevalno vprašanje:

Standardni odklon σ ima pri zgoraj navedeni slučajni spremenljivki vrednost $\sigma = 5{,}2$.

Spremenite v preglednici navedene verjetnosti $P(X = k)$ za vsaj dve vrednosti k tako, da se bo standardni odklon zmanjšal in bo pri tem še vedno predložena veljavna porazdelitev verjetnosti. Vrednosti slučajne spremenljivke (v prvi vrstici preglednice) pa naj ostanejo nespremenjene.
Pojasnite svoj postopek reševanja.

Rešitev naloge 5

Diskretna slučajna spremenljivka

Pričakovana rešitev pri zastavitvi naloge:

Ker znaša vsota vseh verjetnosti 1, sledi: $\frac{8}{n} = 0{,}4$. Iz tega sledi: $n = 20$.

$E(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}1 + 15 \cdot 0{,}3 = 8{,}2$

Ključ za reševanje:

Osnovno kompetenčno točko dodelimo natanko takrat, ko sta tako n kot tudi $E(X)$ pravilno določena in je postopek pravilno pojasnjen.

Pričakovana rešitev pri nadaljevalnem vprašanju:

Možen postopek:
V preglednici navedene verjetnosti moramo za vsaj dve vrednosti k spremeniti tako, da sta obe zahtevi – manjši standardni odklon, veljavna porazdelitev verjetnosti, torej vsota vseh verjetnosti je enaka 1 – na vsak način izpolnjeni.
Smiselna strategija je, verjetnosti na robovih intervala možnih izidov zmanjšati in tiste v sredini povečati.

Možen primer:

k	1	4	7	10	15
$P(X = k)$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Ključ za reševanje:

Točko nadaljevalnega vprašanja dodelimo natanko tedaj, ko sta navedeni pravilna strategija za zmanjšanje standardnega odklona in veljavna porazdelitev verjetnosti.
Izračun novega standardnega odklona pri tem ni potreben.