Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Jänner 2021

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

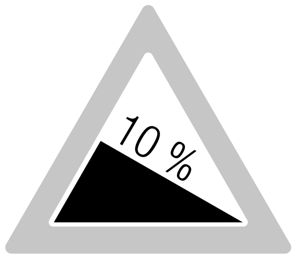
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Steigungswinkel

Die Steigung von stark ansteigenden bzw. stark abfallenden Straßen wird in Prozent angegeben. Das nachstehende Verkehrszeichen besagt, dass entlang dieser Straße pro 100 m horizontaler Entfernung die Höhe um 10 m abnimmt.



Aufgabenstellung:

Sonja behauptet: „Bei einer Straße mit einer Steigung von 10 % ist der Steigungswinkel der Straße ungefähr doppelt so groß wie bei einer Straße mit einer Steigung von 5 %."

– Berechnen Sie die beiden Steigungswinkel.

– Geben Sie an, ob Sonjas Behauptung richtig oder falsch ist.

Leitfrage:

Martin gibt für kleine Winkel α folgenden Zusammenhang an:
$\tan(2 \cdot \alpha) \approx 2 \cdot \tan(\alpha)$

– Deuten Sie diesen Ausdruck im gegebenen Kontext.

– Begründen Sie, warum dieser Zusammenhang für $\alpha = 45°$ nicht gelten kann.

Lösung zur Aufgabe 1

Steigungswinkel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\tan(\alpha_1) = \frac{10}{100} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 5{,}710...° \approx 5{,}71°$

$\tan(\alpha_2) = \frac{5}{100} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 2{,}862...° \approx 2{,}86°$

Sonjas Behauptung ist richtig, da $2 \cdot \alpha_2 \approx \alpha_1$ gilt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Steigungswinkel richtig berechnet werden und die Richtigkeit von Sonjas Behauptung erkannt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Deutung:

Dieser Ausdruck bedeutet, dass eine Verdoppelung des Steigungswinkels annähernd eine Verdoppelung der Steigung bewirkt.
Für $\alpha = 45°$ ist $\tan(2 \cdot \alpha)$ nicht definiert.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Ausdruck im Kontext richtig gedeutet und richtig begründet wird, warum dieser Zusammenhang für $\alpha = 45°$ nicht gelten kann.

Aufgabe 2

Teststrecken

Vom 1. August 2018 bis 29. Februar 2020 wurde auf bestimmten Teilstrecken einer Autobahn in Oberösterreich und Niederösterreich die Erhöhung der Höchstgeschwindigkeit auf 140 km/h getestet. Die jeweilige Zeitersparnis gegenüber der bisher zulässigen Höchstgeschwindigkeit von 130 km/h (unter Annahme exakt jener Werte als Durchschnittsgeschwindigkeiten) ist in der nachstehenden Abbildung ersichtlich.

Bildquelle: https://ooe.orf.at/v2/news/stories/2947525/ [26.09.2019].

Aufgabenstellung:

– Weisen Sie rechnerisch nach, dass der angegebene Wert von 33 s für die Zeitersparnis bei der Teststrecke in Oberösterreich Richtung Salzburg richtig ist.

Leitfrage:

Michael fährt von Wien nach Salzburg auf beiden Teststrecken mit einer konstanten Geschwindigkeit von 140 km/h. Insgesamt kommt es dadurch zu einer Zeitersparnis von 87 s + 33 s = 2 min. Wählt man für diese beiden Teststrecken eine andere als konstant angenommene Geschwindigkeit v (in km/h), so kommt es zu der Zeitersparnis e.

– Geben Sie einen Term an, mit dem für jede Zeitersparnis e in Minuten (auf der Strecke von Wien nach Salzburg) die entsprechende als konstant angenommene Geschwindigkeit v (in km/h) berechnet werden kann.

$v =$ ____

Lösung zur Aufgabe 2

Teststrecken

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\left(\frac{16,45}{130} - \frac{16,45}{140}\right) \cdot 3600 = 32,5... \approx 33 \quad \Rightarrow$ Der angegebene Wert von 33 s ist richtig.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger Nachweis erbracht wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

möglicher Term:

$$\left(\left(\frac{16,45}{130} - \frac{16,45}{v}\right) + \left(\frac{44}{130} - \frac{44}{v}\right)\right) \cdot 60 = e$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{-36270}{10 \cdot e - 279}$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiger Term angegeben wird.

Aufgabe 3

Polynomfunktionen

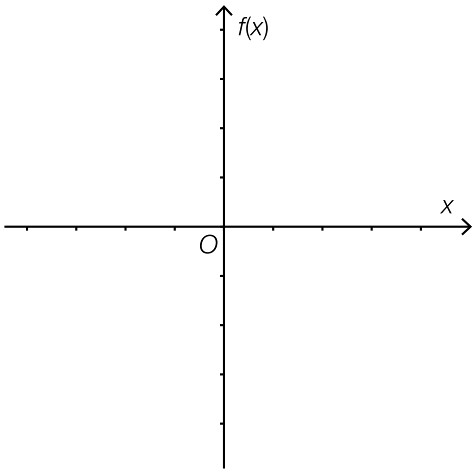
Die Anzahl von Nullstellen, lokalen Extremstellen und Wendestellen ist unter anderem abhängig vom Grad einer Polynomfunktion.

Aufgabenstellung:

– Skizzieren Sie im unten stehenden Koordinatensystem den Graphen einer Polynomfunktion f so, dass genau eine Nullstelle und genau drei lokale Extremstellen erkennbar sind.

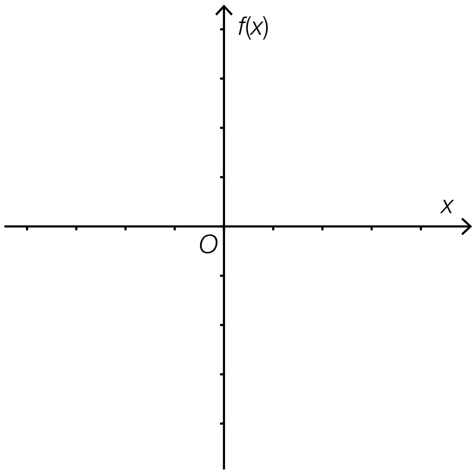
Alle Polynomfunktionen, die die obige Eigenschaft erfüllen, weisen mindestens den Grad n auf.

– Geben Sie n an.



Leitfrage:

– Geben Sie an, wie sich die Zahl der im gegebenen Ausschnitt enthaltenen Nullstellen durch vertikales Verschieben des von Ihnen skizzierten Graphen ändert und worin sich die Funktionsterme dieser Polynomfunktionen (mit unterschiedlich vielen Nullstellen) unterscheiden.
– Skizzieren Sie den Graphen einer Polynomfunktion f vierten Grades, bei der die Anzahl der Nullstellen, der lokalen Extremstellen und der Wendestellen jeweils kleinstmöglich ist.

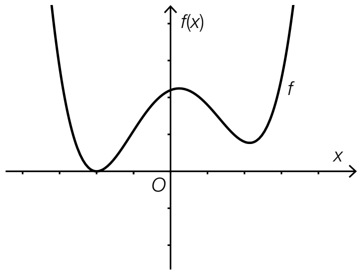


Lösung zur Aufgabe 3

Polynomfunktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

möglicher Graph:



$n = 4$

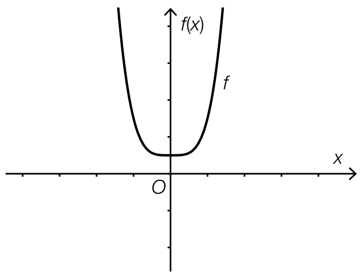
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein möglicher Graph richtig skizziert und der richtige Wert für n angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Durch vertikales Verschieben des skizzierten Graphen können 0, 1, 2, 3 oder 4 Nullstellen erreicht werden.
Die Funktionsterme dieser Polynomfunktionen unterscheiden sich nur in einer additiven Konstanten.

möglicher Graph:



Der angeführte Graph hat keine Nullstelle, nur eine lokale Extremstelle und keine Wendestelle.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Anzahl an Nullstellen und der Unterschied zwischen den Funktionstermen richtig angegeben werden und ein möglicher Graph richtig skizziert wird.

Aufgabe 4

Abkühlung einer Flüssigkeit

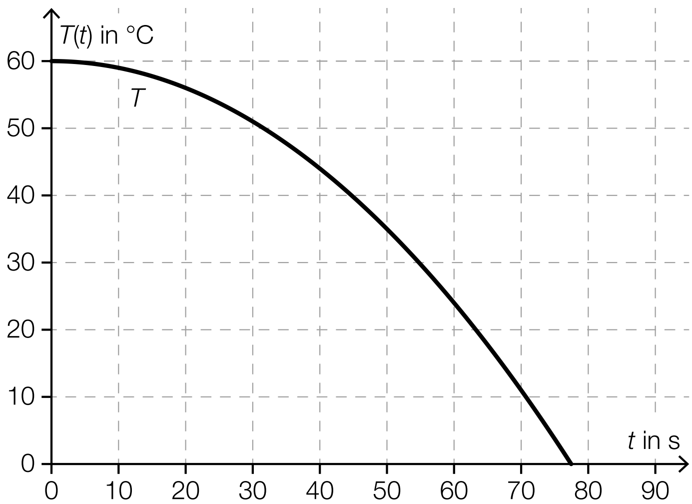
Die Temperatur T einer abkühlenden Flüssigkeit kann in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch die Funktionsgleichung $T(t) = 60 - 0{,}01 \cdot t^2$ beschrieben werden (t in s, $T(t)$ in °C).

Aufgabenstellung:

– Geben Sie die mittlere Änderungsrate der Temperatur im Intervall [30; 70] an und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext.

Leitfrage:

– Deuten Sie die berechnete mittlere Änderungsrate (unter Zuhilfenahme der unten stehenden Abbildung) grafisch.
– Erläutern Sie, wie diejenige Stelle t_1 des Graphen von T grafisch ermittelt werden kann, bei der die momentane Änderungsrate gleich groß wie die berechnete mittlere Änderungsrate ist, und berechnen Sie t_1.



Lösung zur Aufgabe 4

Abkühlung einer Flüssigkeit

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mittlere Änderungsrate: $\frac{T(70) - T(30)}{70 - 30} = \frac{11 - 51}{40} = -1$

mögliche Interpretation:

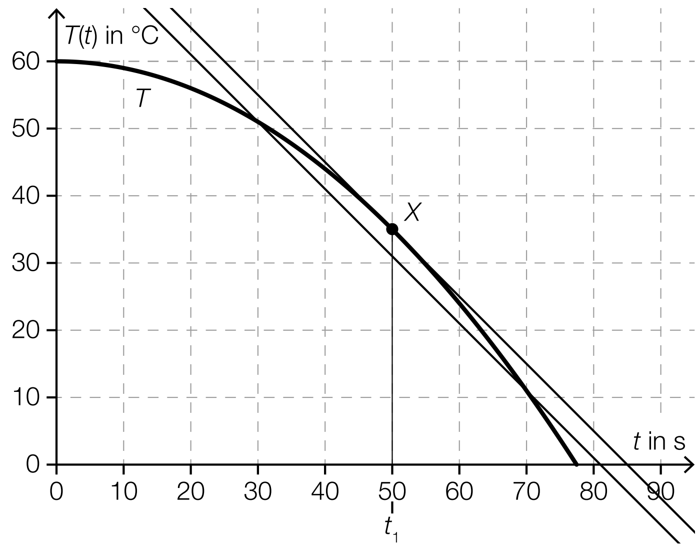
Die Temperatur nimmt im Zeitintervall [30; 70] im Durchschnitt um 1 °C pro Sekunde ab.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige mittlere Änderungsrate und eine richtige Interpretation angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die berechnete mittlere Änderungsrate ist gleich der Steigung der Sekantenfunktion von T in [30; 70].



Die Stelle t_1 kann grafisch ermittelt werden, indem derjenige Punkt X am Graphen von T gesucht wird, in dem die Tangentensteigung genauso groß ist wie die Steigung der eingezeichneten Sekante (d. h., dass die beiden Geraden parallel liegen müssen).

Berechnung von t_1: $T'(t_1) = -0{,}02 \cdot t_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 50$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die mittlere Änderungsrate richtig als Steigung der Sekantenfunktion gedeutet wird und richtig erläutert wird, wie t_1 ermittelt werden kann, sowie der Wert für t_1 richtig berechnet wird.

Aufgabe 5

Normalapproximierte Zufallsvariable

Die Normalapproximation einer binomialverteilten Zufallsvariablen X liefert eine Zufallsvariable Y mit einem Erwartungswert μ und einer Standardabweichung σ.

Aufgabenstellung:

– Beschreiben Sie die nachstehenden Wahrscheinlichkeiten und ermitteln Sie diese.
  - $P(Y < \mu - \sigma)$
  - $P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq Y \leq \mu + 2 \cdot \sigma)$

Leitfrage:

– Stellen Sie die in der Aufgabenstellung ermittelten Wahrscheinlichkeiten grafisch dar (als Flächen unter dem Graphen einer passenden Funktion) und erläutern Sie den Verlauf des verwendeten Funktionsgraphen in Bezug auf lokale Extremstelle(n) und Symmetrie.

Lösung zur Aufgabe 5

Normalapproximierte Zufallsvariable

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

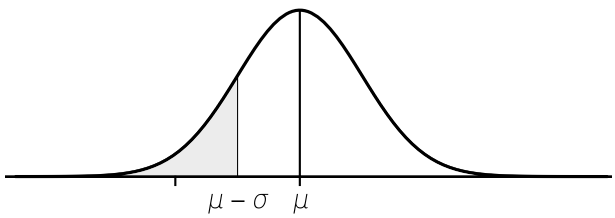
- Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Erwartungswert um mehr als den Wert der (einfachen) Standardabweichung unterschritten wird.
  $P(Y < \mu - \sigma) \approx 0{,}159$
- Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Zufallsvariablen um höchstens das Doppelte der Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.
  $P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq Y \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 0{,}954$

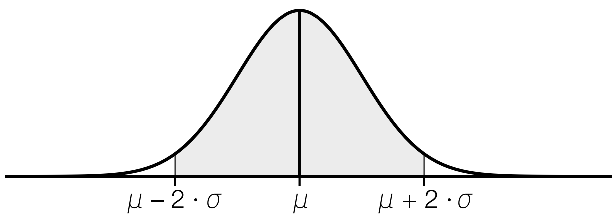
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Wahrscheinlichkeiten sowohl richtig ermittelt als auch richtig beschrieben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Dichte von Y:





Der Graph (der Gauß'schen Glockenkurve) ist symmetrisch um den Erwartungswert und hat dort eine lokale Maximumstelle.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Wahrscheinlichkeiten grafisch richtig dargestellt werden und der Verlauf des Graphen richtig erläutert wird.