Ime:	
Razred/Letnik:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

17. september 2021

Uporabna matematika

TAK

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za reševanje nalog

Draga kandidatka! Dragi kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred Vami, vsebuje naloge dela A in naloge dela B z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge je moč reševati med seboj neodvisno.

Za reševanje uporabljajte izključno ta zvezek z nalogami in delovne liste, ki so vam dani na razpolago. Svoje ime in letnik oz. Vaš razred vpišite na naslovno stran zvezka z nalogami v za to predvideni polji, ter Vaše ime in zaporedno številko strani na vsak uporabljeni delovni list. Pri reševanju vsake delne naloge na delovni list navedite njeno oznako (npr. 3d1).

V vrednotenje bo vključeno vse, kar ni prečrtano. Zabeležke prečrtajte.

Dovoljena je uporaba Zbirke formul za »SRDP« iz uporabne matematike, ki je potrjena za klavzurno nalogo (izpit) s strani pristojnega člana vlade. Nadalje je dovoljena uporaba elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije), če ni dana možnost komuniciranja (npr. preko interneta, intraneta, bluetooth, mobilnih omrežij itd.) in ni možen dostop do lastnih datotek v elektronskem pripomočku.

Pojasnilo formatov odgovorov je v izpitnem prostoru na voljo za vpogled.

Smernice za reševanje

- Vsak izračun je potrebno izvesti z razumljivim računskim nastavkom in razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljena funkcija tehnologije).
- Spremenljivke, ki jih izberete sami, je potrebno pojasniti in po potrebi navesti enote.
- Rezultate je potrebno nedvoumno poudariti.
- Rezultate je potrebno navesti z ustreznimi enotami, če je to v navodilu za delo izrecno zahtevano.
- Če so kot rešitve izdelani diagrami ali skice, je potrebno osi opisati ter označiti.
- Če so izdelane geometrijske skice, je potrebno dele, ki so pomembni za rešitev, označiti.
- Izogibajte se prezgodnjega zaokroževanja.
- Priložite morebitne računalniške izpise rešitve, opremljene z Vašim imenom.
- Če je naloga izračunana večkrat, je potrebno vse poti reševanja razen ene, prečrtati.

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, kjer je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v želeni okvirček.

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite želeni prebarvani okvirček.

Tukaj je bil odgovor »2 + 2 = 4« najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Velja naslednji ključ ocenjevanja:

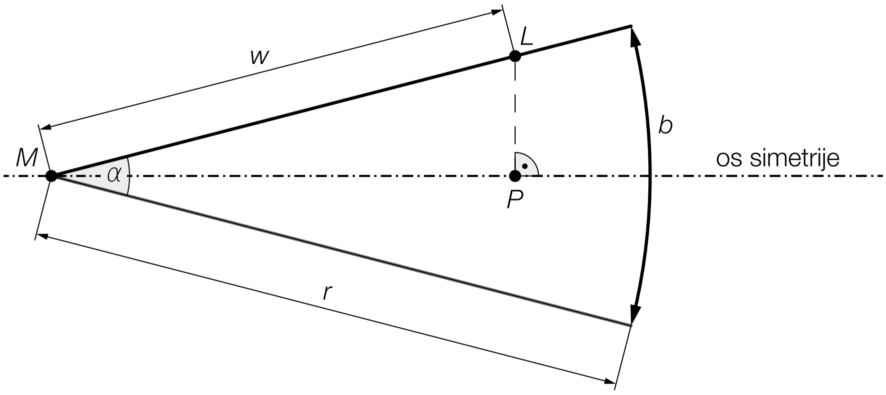
44–48 točk	zelo dobro	Sehr gut
38–43 točk	dobro	Gut
31–37 točk	povoljno (zadovoljivo)	Befriedigend
23–30 točk	zadostno	Genügend
0–22 točk	nezadostno	Nicht genügend

Veliko uspeha!

Naloga 1

Met kopja

a) Območje meta pri metu kopja ima obliko krožnega izseka (glej naslednjo sliko, ki ni v pravem sorazmerju, v pogledu od zgoraj).



z je razlika med dejansko dolžino meta $w = \overline{ML}$ in dolžino daljice $\overline{MP}$.

1) Ob uporabi w in α nastavite formulo za izračun z.

$z =$ ____________________ *[0/1 t.]*

Za dolžino loka b krožnega izseka in središčni kot α krožnega izseka velja:
$b = 48{,}08$ m
$\alpha = 29°$

2) Izračunajte polmer r krožnega izseka. *[0/1 t.]*

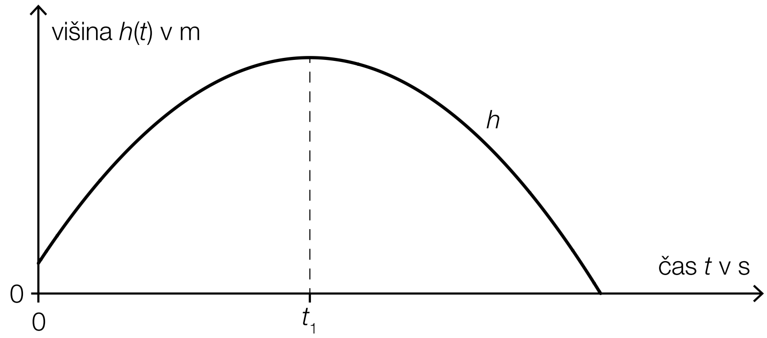
b) Del grafa funkcije f opisuje pot leta konice kopja pri nekem določenem metu.

$f(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}7 \cdot x + 1{,}8$ pri $x \geq 0$

x ... vodoravna oddaljenost od začetne točke meta v m
$f(x)$ ... višina nad tlemi pri vodoravni oddaljenosti x v m

1) Izračunajte vodoravno oddaljenost od začetne točke meta, na kateri konica kopja pri tem metu prileti na tla. *[0/1 t.]*

c) Kvadratna funkcija *h* opisuje višino konice kopja med nekim določenim metom, v odvisnosti od časa *t* (glej naslednjo sliko).



1) Obema začetkoma stavka vsakič priredite nadaljevanje izmed A do D tako, da nastaneta pravilni izjavi. *[0/1 t.]*

Trenutna hitrost spreminjanja funkcije *h* ob času *t* je negativna za	
Trenutna hitrost spreminjanja funkcije *h* ob času *t* je nič za	

A	$t = 0$
B	$t = t_1$
C	$t < t_1$
D	$t > t_1$

Naloga 2

Igralne karte

a) Neki kup igralnih kart je sestavljen iz 20 *pomožnih*-kart in 10 *čarobnih*-kart. Sabine izvleče naključno, brez vračanja, 3 karte iz tega kupa kart.

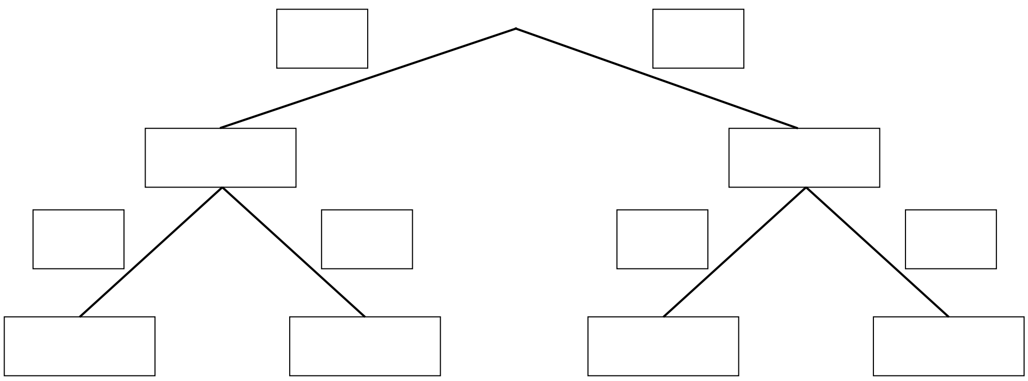
1) Izračunajte verjetnost, da Sabine pri tem izvleče natanko 1 *čarobno*-karto. *[0/1 t.]*

2) V dani vsebinski povezavi opišite dogodek E, čigar verjetnost se izračuna z naslednjim izrazom.

$P(E) = 1 - \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{18}{28} = 0{,}719...$ *[0/1 t.]*

b) Lukas izbere pri 40 % svojih iger agresivno strategijo, pri preostalih igrah pa izbere defenzivno strategijo.
Igre, pri katerih izbere agresivno strategijo, zmaguje z verjetnostjo p.
Igre, pri katerih izbere defenzivno strategijo, zmaguje z verjetnostjo 54 %.

1) Izpopolnite naslednji drevesni diagram tako, da bo prikazoval opisano vsebinsko povezavo. *[0/1 t.]*



Verjetnost, da Lukas neko naključno izbrano igro zmaga, znaša 53,2 %.

2) Izračunajte verjetnost p. *[0/1 t.]*

Naloga 3

Svetleče diode

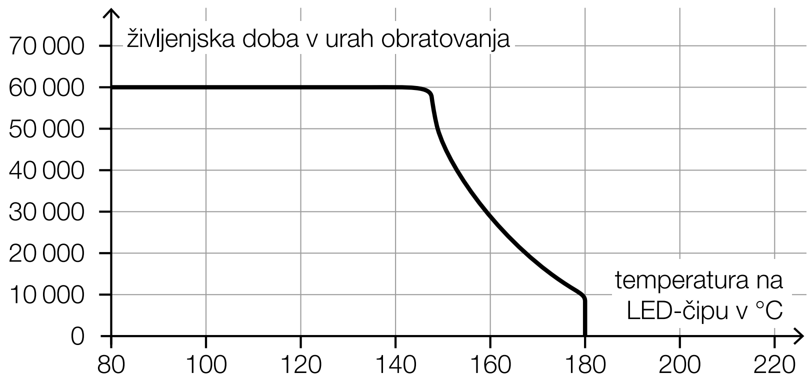
Svetleče diode (LED) se pogosto uporabljajo kot sredstvo za razsvetljavo.

a) LED imajo omejen središčni kot. Za tako imenovano *celostno-razsvetljavo* je zato potrebnih več LED. Število LED istega tipa, ki je potrebnih za celostno-razsvetljavo, je moč izračunati po naslednjem predpisu:

Deli 1 s sinusom ene četrtine središčnega kota.
Kvadriraj dobljeno število.
Če zdaj dobljeni rezultat ni celoštevilski, potem ga zaokroži na naslednje večje celo število.

1) Izračunajte število LED s središčnim kotom 40°, ki jih v skladu z gornjim predpisom potrebujemo za celostno razsvetljavo. *[0/1 t.]*

b) Življenjska doba LED je odvisna od temperature na LED-čipu. Na neki spletni strani je ta povezava grafično predstavljena (glej naslednjo sliko).



Vir: https://www.led-studien.de/wp-content/uploads/2015/10/Lebensdauer-nach-LED-Temperatur.png [16.08.2019] (prirejeno).

1) Ugotovite povprečno hitrost spreminjanja življenjske dobe pri povečanju temperature od 140 °C na 160 °C. *[0/1 t.]*

2) Utemeljite zakaj pri krivulji, predstavljeni na gornji sliki, ne more iti za graf neke funkcije. *[0/1 t.]*

c) Merilo za svetlost nekega svetlobnega vira je tako imenovani *svetlobni tok*. Le-ta se podaja v enoti lumen.
Izhajamo iz tega, da bo zaradi tehnološkega razvoja maksimalni svetlobni tok LED eksponentno naraščal.
Pri tem velja: vsakih 10 let se maksimalni svetlobni tok povzpne na 20 kratnik.

Ta razvoj je moč modelirati z neko eksponentno funkcijo L.

$L(t) = L_0 \cdot a^t$

t … čas v letih
$L(t)$ … maksimalni svetlobni tok ob času t v lumnih
L_0 ... maksimalni svetlobni tok ob času $t = 0$ v lumnih
a ... pozitivni parameter

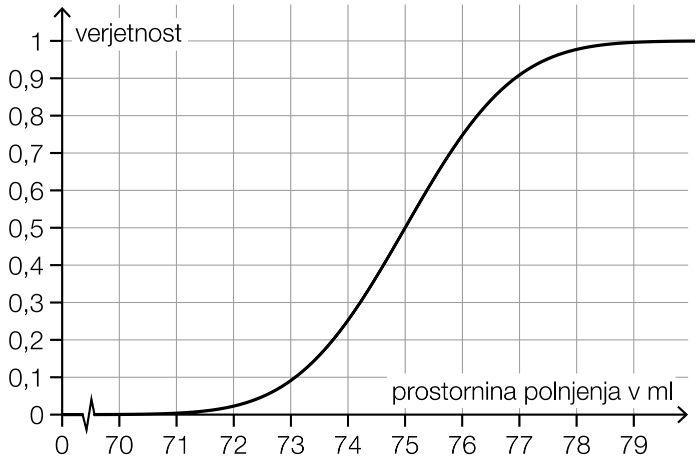
1) Izračunajte parameter a. *[0/1 t.]*

2) Interpretirajte vrednost parametra a v dani vsebinski povezavi. *[0/1 t.]*

Naloga 4

Kozmetični preparati

a) Neki parfum polnijo v določene stekleničke. Prostornina polnjenja se pri tem privzema kot približno normalno porazdeljena s standardnim odklonom σ = 1,5 ml.
Na naslednji sliki je predstavljen graf pripadajoče porazdelitvene funkcije.



1) Iz gornje slike odčitajte pričakovano vrednost μ prostornine polnjenja.

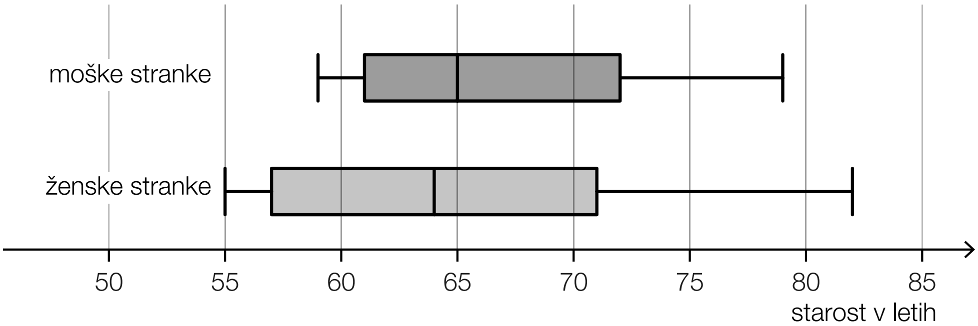
μ = ____________________ ml *[0/1 t.]*

2) Ugotovite tisti simetrični interval okoli μ, v katerem leži prostornina polnjenja neke naključno izbrane stekleničke z verjetnostjo 80 %. *[0/1 t.]*

3) Na gornji sliki ponazorite verjetnost, da znaša prostornina polnjenja neke naključno izbrane stekleničke največ 76 ml. *[0/1 t.]*

b) Neki določeni kozmetični preparat kupujejo tako moške kakor tudi ženske stranke.

Raziskava o starosti vseh strank, ki so ta preparat kupile, je povzeta na naslednji sliki v obliki dveh Box-plot diagramov.



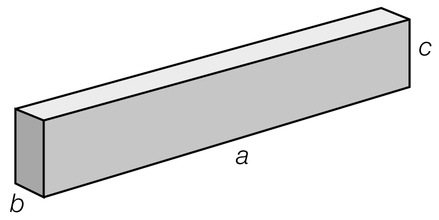
1) S križcem označite pravilno izjavo. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

Variacijski razmik starosti ženskih strank je manjši kot le-ta pri moških strankah.	☐
Najmlajša oseba, ki je kupila ta kozmetični preparat je moškega spola.	☐
Mediana starosti moških strank je večja kot le-ta pri ženskih strankah.	☐
Več kot polovica ženskih strank je starejših od 65 let.	☐
3. kvartil starosti ženskih strank je večji lot le-ta pri moških strankah.	☐

Naloga 5

Vlažnost lesa in sušenje lesa

a) Pri sušenju se stranice nekega vlažnega kosa lesa v obliki kvadra skrajšajo.



a, b, c ... stranice kosa lesa v obliki kvadra v vlažnem stanju

V suhem stanju je stranica a za 0,5 %, stranica b za 10 % in stranica c za 5 % krajša kot v vlažnem stanju.

1) Nastavite formulo za izračun prostornine V kosa lesa v obliki kvadra, v suhem stanju. Pri tem uporabite dolžine stranic a, b in c.

$V =$ ______________________________ *[0/1 t.]*

2) Ugotovite, za koliko odstotkov je prostornina kosa lesa v obliki kvadra v suhem stanju manjša kot v vlažnem stanju. *[0/1 t.]*

b) Lesene deske iste vrste lesa z različnimi debelinami, se različno hitro sušijo. To povezavo je moč približno opisati z naslednjo formulo.

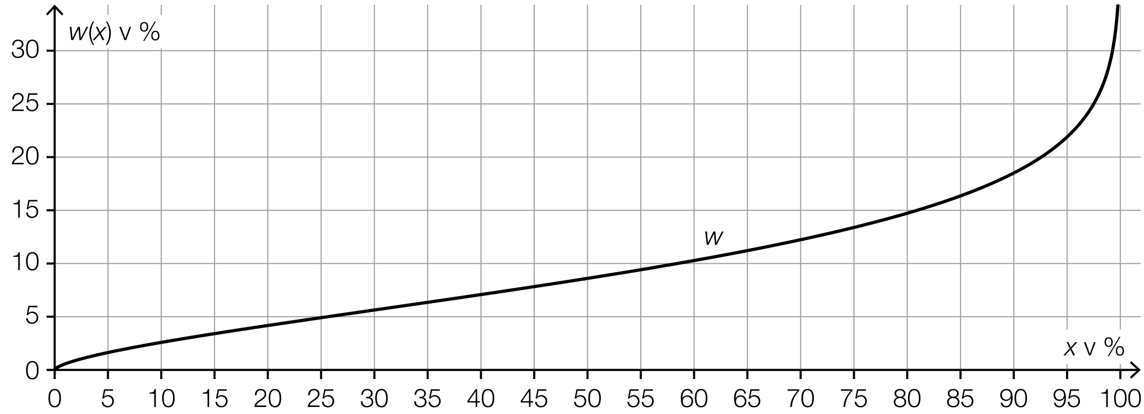
$$\frac{T}{t} = \left(\frac{D}{d}\right)^{1,5}$$

	debelina	čas sušenja
lesena deska 1	d	t
lesena deska 2	D	T

1) S križcem označite tisto izjavo, ko <u>ne</u> ustreza gornji povezavi. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

$\frac{T}{t} = \left(\frac{D}{d}\right)^{\frac{3}{2}}$	☐
$\frac{T}{t} = \left(\frac{d}{D}\right)^{-1,5}$	☐
$\frac{T}{t} = \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^{3}}$	☐
$\frac{t}{T} = \left(\frac{d}{D}\right)^{-\frac{3}{2}}$	☐
$\frac{t}{T} = \left(\frac{d}{D}\right)^{1,5}$	☐

c) V naslednjem diagramu je predstavljena odvisnost med relativno vlažnostjo x (v odstotkih) in vsebnostjo vode $w(x)$ (v odstotkih) za neko določeno vrsto lesa pri skladiščenju.



1) V gornjem diagramu označite tisto točko $P = (x_0 | w(x_0))$, za katero velja:
$w'(x_0) = 1$ *[0/1 t.]*

V gornjem diagramu predstavljena odvisnost naj bo na intervalu [45; 55] s pomočjo točk $A = (45|7{,}8)$ in $B = (55|9{,}4)$ modelirana z linearno funkcijo.

2) Nastavite enačbo te linearne funkcije. *[0/1 t.]*

Naloga 6

Potovalni računalnik

Neki potovalni računalnik je 12 min beležil hitrost osebnega avtomobila. Graf tako določene funkcije hitrosti *v* v odvisnosti od časa je modelno predstavljen na naslednji sliki.

a) Ploščino med grafom funkcije *v* in časovno osjo je na intervalu [8 min; 12 min] moč približno podati s ploščino štirikotnika. Označene točke na mreži so oglišča tega štirikotnika.

1) Izračunajte ploščino tega štirikotnika. *[0/1 t.]*

2) Interpretirajte to ploščino v dani vsebinski povezavi. Pri tem navedite tudi pripadajočo enoto. *[0/1 t.]*

b) Neko motorno kolo je v teh 12 min vozilo s konstantno hitrostjo 1,75 km/min.

1) V gornji sliki vrišite graf funkcije hitrosti v odvisnosti od časa za to motorno kolo. *[0/1 t.]*

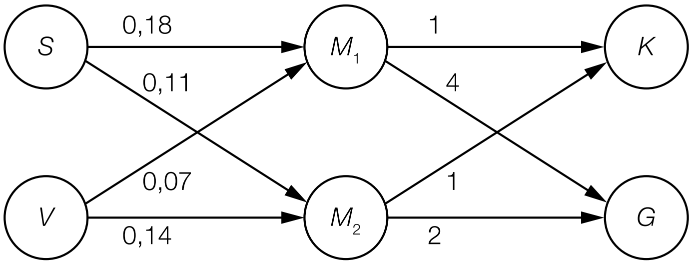
c) 1) S križcem označite pravilno izjavo. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

Prevožena pot osebnega avtomobila se na intervalu [4 min; 8 min] manjša.	☐
Hitrost osebnega avtomobila se na intervalu [4 min; 8 min] veča.	☐
Pospešek osebnega avtomobila je na intervalu [4 min; 8 min] negativen.	☐
Povprečna hitrost osebnega avtomobila je na intervalu [4 min; 8 min] manjša kot 1,5 km/min.	☐
Na intervalu [4 min; 8 min] obstaja časovni trenutek, v katerem osebni avtomobil vozi s 75 km/h.	☐

Naloga 7 (del B)

Mešanice pudingov

Iz čistih sort pudinga izdelujejo različne mešane sorte. Le-te prodajajo v različnih pakiranjih. Naslednji Gozinto-graf prikazuje ta proizvodni proces.



S ... čisti čokoladni puding (v litrih)
V ... čisti vaniljev puding (v litrih)

M_1 ... mešana sorta 1: čokoladni puding z vaniljevimi packami (v lončkih)
M_2 ... mešana sorta 2: vaniljev puding s čokoladnimi packami (v lončkih)

K ... majhna pakiranja (v kosih)
G ... velika pakiranja (v kosih)

a) 1) Ugotovite koliko odstotkov čokoladnega pudinga je v enem lončku M_1. *[0/1 t.]*

2) Prenesite Gozinto-graf v 2 matriki, ki opisujeta potrebo po količinah čistih sort pudinga za mešane sorte oz. potrebo po količinah mešanih sort za pakiranja. *[0/1 t.]*

Neki supermarket naroči 300 majhnih in 200 velikih pakiranj.

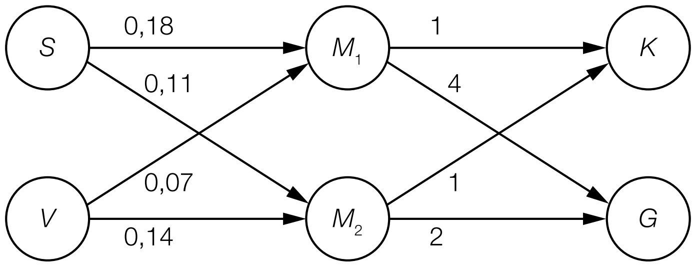
3) Ugotovite za to vsakič potrebno količino čokoladnega in vaniljevega pudinga v litrih. *[0/1 t.]*

b) Potek proizvodnje se spremeni. Kvadratna matrika $\boldsymbol{A}$ opisuje proizvodne prepletenosti med čistimi sortami pudinga, mešanimi sortami in pakiranji (v zaporedju S, V, M_1, M_2, K, G).

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}18 & 0{,}11 & 0 & \mathbf{0{,}50} \\ 0 & 0 & 0{,}07 & 0{,}14 & 0 & \mathbf{0{,}25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Novi pri tem sta: $a_{16} = 0{,}50$ in $a_{26} = 0{,}25$.

1) Vrišite obe ti dve novi prepletenosti v naslednji Gozinto-graf. *[0/1 t.]*



Vektor $\vec{x}$ naj opisuje potrebne količine čistih sort pudinga, mešanih sort in pakiranj (v zaporedju S, V, M_1, M_2, K, G).

2) Ugotovite ta vektor $\vec{x}$ za povpraševanje po 300 majhnih in 200 velikih pakiranjih. *[0/1 t.]*

Iz nekega drugega povpraševanja izhaja namesto $\vec{x}$ vektor $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 461 \\ 264 \\ 1\,300 \\ \mathbf{700} \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$.

3) Interpretirajte vnos 700 iz tega vektorja v dani vsebinski povezavi. *[0/1 t.]*

4) Opišite, kako se neko dodatno direktno povpraševanje po čistem čokoladnem pudingu v obsegu 100 litrov odraža na vektorju $\vec{x}_1$. *[0/1 t.]*

c) Proizvodni proces se razširi na druge sorte pudinga.
Iz a čistih sort pudinga se izdeluje b različnih mešanih sort, ki se nato pakirajo v c različnih velikosti pakiranj. Kvadratna matrika ***B*** opisuje proizvodne prepletenosti med čistimi sortami pudinga, mešanimi sortami in pakiranji.

1) Obema lastnostma matrike ***B*** priredite vsakič ustrezni izračun izmed A do D. *[0/1 t.]*

število elementov matrike ***B***	
število vrstic matrike ***B***	

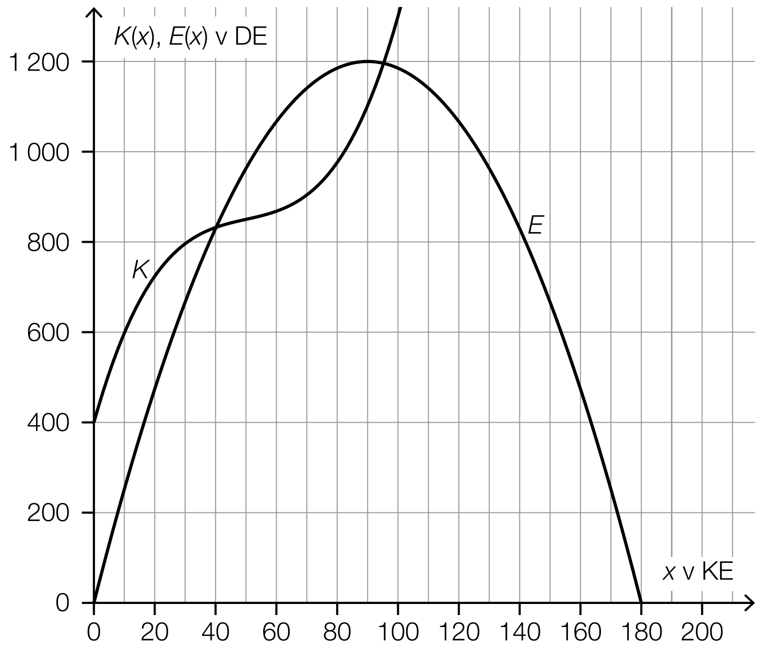
A	$a \cdot b \cdot c$
B	$a + b + c$
C	$(a + b + c) \cdot 2$
D	$(a + b + c)^2$

Naloga 8 (del B)

Stekla za osebne avtomobile

Neko podjetje izdeluje prednja in zadnja stekla za osebne avtomobile.

a) Na naslednji sliki sta za prednja stekla nekega določenega tipa predstavljena graf funkcije stroškov *K* in graf kvadratne funkcije izkupička *E*.



1) Nastavite enačbo kvadratne funkcije izkupička *E*. *[0/1 t.]*

2) Nastavite enačbo pripadajoče cenovne funkcije povpraševanja. *[0/1 t.]*

3) Iz gornje slike odčitajte območje dobička.

[______ ; ______] *[0/1 t.]*

b) Variabilne stroške pri proizvodnji zadnjih stekel nekega določenega tipa je moč opisati s funkcijo K_v.

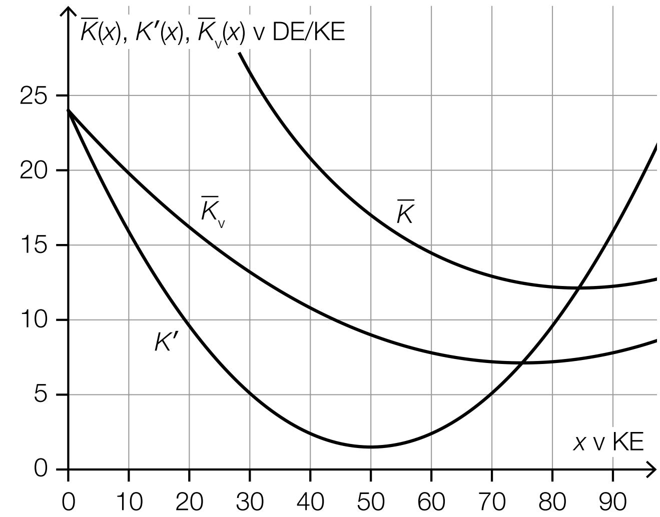
$K_v(x) = 0{,}0029 \cdot x^3 - 0{,}45 \cdot x^2 + 24 \cdot x$

x ... proizvedena količina v KE
$K_v(x)$ ... variabilni stroški pri proizvedeni količini x v DE

Fiksni stroški znašajo 450 DE.

1) Izračunajte dolgoročno najnižjo ceno. *[0/1 t.]*

Na naslednji sliki so predstavljeni graf funkcije povprečnih stroškov $\overline{K}$, graf funkcije mejnih stroškov K' in graf funkcije povprečnih variabilnih stroškov $\overline{K}_v$.



2) S križcem označite tisto količino, ko je <u>ni</u> moč odčitati iz gornje slike. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

obračaj (prevoj) stroškov	☐
fiksni stroški	☐
minimum obratovanja	☐
optimum obratovanja	☐
kratkoročna najnižja cena	☐

Cenovna funkcija povpraševanja p_N za zadnja stekla tega tipa je podana z:

$p_N(x) = -0{,}16 \cdot x + 30$

x ... povpraševana količina v KE
$p_N(x)$ ... cena pri povpraševani količini x v DE/KE

3) Navedite najvišjo ceno. *[0/1 t.]*

4) Izračunajte Cournotovo ceno. *[0/1 t.]*

Naloga 9 (del B)

Gibanje obresti

Obrestne mere za kredite in hranilne vloge so podležene časovno-odvisnim nihanjem.

a) Obrestna mera za kredit pri neki banki je med drugim odvisna tudi od tega, kakšen je njegov namen uporabe.
Potrošniški krediti so namenjeni financiranju potrošnega blaga ali uslug.
Stanovanjski krediti služijo financiranju izgradnje stanovanj.

V naslednji preglednici je predstavljeno gibanje obrestnih mer za oba namena uporabe, v časovnem obdobju od 2000 do 2004 v Avstriji.

leto	2000	2001	2002	2003	2004
obrestna mera za potrošniške kredite v % p. a.	6,63	6,69	6,06	5,42	5,18
obrestna mera za stanovanjske kredite v % p. a.	5,87	5,93	5,35	4,41	3,90

Vir podatkov: https://www.oenb.at/Statistik/Standardisierte-Tabellen/zinssaetze-und-wechselkurse/Zinssaetze-der-Kreditinstitute.html [04.08.2021].

1) Nastavite enačbo regresijske premice za povezavo med obrestno mero za potrošniške kredite x in obrestno mero za stanovanjske kredite y v navedenem časovnem obdobju. *[0/1 t.]*

2) S pomočjo korelacijskega koeficienta presodite, če predstavlja regresijska premica ustrezen model za opis te povezave. *[0/1 t.]*

Obrestna mera je v letu 2005 znašala za potrošniške kredite 4,89 % p. a. in za stanovanjske kredite 3,58 % p. a.

3) Izračunajte razliko med dejansko obrestno mero za stanovanjske kredite v letu 2005 in med ustrezno obrestno mero ugotovljeno s pomočjo regresijske premice. *[0/1 t.]*

b) Pri sklenitvi kreditne pogodbe se lahko določi, če obrestna mera ostaja med celotnim rokom vračila konstantna, ali če se obrestna mera sproti spreminja v skladu z aktualno situacijo na trgu.
V naslednji preglednici je predstavljen izrez iz nekega odplačilnega načrta.

leto	obresti (obrestni delež)	razdolžnina (odplačilni delež)	anuiteta	ostanek dolga
0				€ 50.000,00
1	€ 2.100,00	€ 4.900,00	€ 7.000,00	€ 45.100,00
2	€ 1.894,20	€ 5.105,80	€ 7.000,00	€ 39.994,20
3	€ 1.399,80		€ 7.000,00	

1) Dokazljivo preverite, če se je obrestna mera med predstavljenimi 3 leti spremenila. *[0/1 t.]*

2) V gornjo preglednico vnesite oba manjkajoča zneska pri letu 3. *[0/1 t.]*

c) Neki denarni znesek *B* se 2 leti obrestuje z letno obrestno mero i_0, nato pa naslednja 3 leta s spremenjeno letno obrestno i_1.

1) Nastavite formulo za končno vrednost *E* ob koncu teh 5 let. Pri tem uporabite *B*, i_0 in i_1.

$E =$ ____ *[0/1 t.]*

2) Za $i_0 = 3\ \%$ in $i_1 = 1\ \%$ izračunajte tisto nespremenljivo obrestno mero *i*, pri kateri znesek *B* v 5 letih naraste na enako končno vrednost *E*. *[0/1 t.]*