Ime:	
Razred/Letnik:	

Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni in diplomski izpit

Poklicno izobraževalna višja šola (BHS)

3. maj 2023

Uporabna matematika

TAK

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Navodila za reševanje nalog

Spoštovana kandidatka! Spoštovani kandidat!

Zvezek z nalogami, ki je pred Vami, vsebuje naloge dela A in naloge dela B, z vsakič različnim številom delnih nalog. Delne naloge je moč reševati med seboj neodvisno. Na razpolago imate *270 minut* delovnega časa.

Za reševanje uporabljajte izključno ta zvezek z nalogami in delovni papir, ki vam je dan na razpolago. Svoje ime in Vaš letnik oz. Vaš razred vpišite v za to predvideni polji na naslovnici zvezka z nalogami, ter Vaše ime in zaporedno številko strani na vsak uporabljeni list delovnega papirja. Pri odgovarjanju vsakega navodila za delo, na delovni papir navedite njegovo oznako (npr.: 3d1).

Pri vrednotenju bo upoštevano vse, kar ni prečrtano.

Dovoljena je uporaba Zbirke formul za SRDP iz Uporabne Matematike, ki je za klavzurno nalogo potrjena s strani pristojnega člana vlade. Nadalje je dovoljena uporaba elektronskih pripomočkov (npr. grafičnega računala ali druge ustrezne tehnologije), če ni prisotna možnost komuniciranja (npr. preko interneta, intraneta, bluetooth, mobilnih omrežij itd.) in ni možen dostop do lastnih datotek v elektronskem pripomočku.

Pojasnilo formatov odgovorov je na vpogled v izpitnem prostoru.

Smernice za reševanje

– Pri nalogah odprtega formata je potrebno vsak račun izvesti z razumljivim računskim nastavkom oz. z razumljivo dokumentacijo uporabe tehnologije (navedeni morajo biti uporabljeni izhodiščni parametri in uporabljena funkcija tehnologije).
– Rešitve morajo biti kot le-te na vsak način enoznačno razpoznavne.
– Rešitve morajo biti na vsak način navedene s pripadajočimi enotami, če je to eksplicitno zahtevano v navodilu za delo.

Za obdelavo se priporoča:

– spremenljivke, ki jih izberete sami, pojasniti in po potrebi navesti s pripadajočimi enotami,
– izogibati se prezgodnjemu zaokroževanju,
– označiti diagrame ali skice.

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, kjer je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v želeni okvirček.

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor »5 + 5 = 9« in nato spremenjen na »2 + 2 = 4«.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite željeni prebarvani okvirček.

Tukaj je bil odgovor »2 + 2 = 4« najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Ključ vrednotenja:

dosežene točke	ocena
44–48 točk	Sehr gut – *prav dobro*
38–43 točk	Gut – *dobro*
31–37 točk	Befriedigend – *povoljno*
23–30 točk	Genügend – *zadostno*
0–22 točk	Nicht genügend – *nezadostno*

Veliko uspeha!

Prosimo obrnite list.

Naloga 1

Pohod

a) Lukas se odpravi na pohod.

Na začetku hodi 1 h 15 min s konstantno hitrostjo 4 km/h.
Nato hodi s konstantno hitrostjo 2 km/h dalje.
Za celotni pohod porabi 3 h 45 min.

1) Izračunajte povprečno hitrost za celotni pohod. *[0/1 t.]*

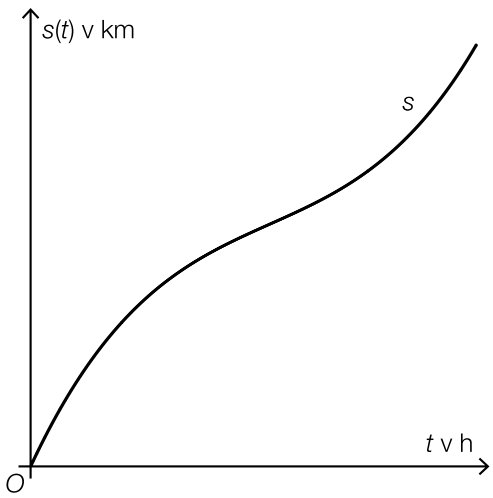
b) Lena se odpravi na pohod.

Pri tem je pot, ki jo prehodi, moč v odvisnosti od časa približno opisati s funkcijo *s*.

$s(t) = 0{,}32 \cdot t^3 - 2{,}32 \cdot t^2 + 7{,}08 \cdot t \quad \text{pri} \quad 0 \leq t \leq 4{,}5$

t ... čas od začetka pohoda v h
$s(t)$ ... opravljena pot ob času t v km

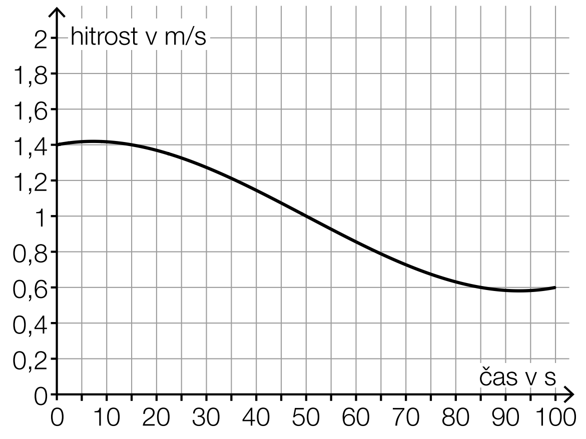
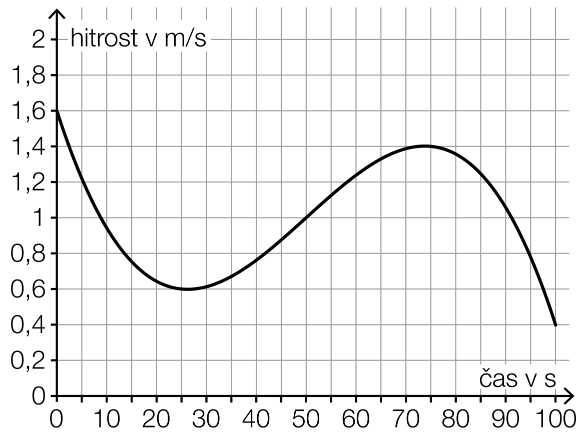
Na naslednji sliki je predstavljen graf funkcije *s*.



1) Ugotovite, ob katerem času hodi Lena z najmanjšo hitrostjo. *[0/1 t.]*

2) Ugotovite tisti časovni interval, v katerem hodi Lena s hitrostjo največ 5 km/h. *[0/1 t.]*

c) 1) Obema diagramoma hitrosti v odvisnosti od časa priredite vsakič ustrezni izraz izmed A do D. *[0/1 t.]*

A	Hitrost je po približno 26 sekundah največja.
B	Pospešek je po približno 50 sekundah najmanjši.
C	Opravljena pot v časovnem intervalu [70; 80] je daljša kot je le-ta v časovnem intervalu [20; 30].
D	V časovnem intervalu [0; 100] je hitrost po približno 75 sekundah največja.

Naloga 2

Pozidava površin

Vsak dan se za različne namene v naravi pozidava zelene površine.

a) Leta 2013 se je v Avstriji povprečno dnevno na novo pozidala površina 15 hektarov.
Leta 2017 se je v Avstriji povprečno dnevno na novo pozidala površina 12,4 hektarov.
Časovni razvoj velikosti površine, ki se v Avstriji povprečno dnevno na novo pozida, je moč modelno opisati z linearno funkcije f.

t ... čas v letih pri $t = 0$ za leto 2013
$f(t)$ ... povprečna dnevno na novo pozidana površina ob času t v hektarih

1) Nastavite enačbo funkcije f. *[0/1 t.]*

Povprečna dnevno na novo pozidana površina naj bi se zmanjšala na 2 hektara.

2) Izračunajte po kolikšnem času je, glede na ta model, ta smernica izpolnjena. *[0/1 t.]*

b) Površino, ki se uporablja za kmetijske namene, označujemo kot agrarno površino. Časovni razvoj agrarne površine Avstrije je moč modelno opisati s funkcijo N.

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}995^t$
t ... čas v letih pri $t = 0$ ob začetku leta 2017
$N(t)$ ... agrarna površina Avstrije ob času t v hektarih
N_0 ... agrarna površina Avstrije ob začetku leta 2017 v hektarih

1) Izračunajte po koliko časa bo, glede na ta model, agrarna površina Avstrije za 5 % manjša kot je bila ob začetku leta 2017. *[0/1 t.]*

2) S križcem označite tisti izraz, s katerim je moč izračunati relativno spremembo agrarne površine Avstrije za vsak časovni interval [0; T]. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

$-0{,}005 \cdot T$	☐
$1 - 0{,}005^T$	☐
$0{,}995^T$	☐
$0{,}005^T$	☐
$0{,}995^T - 1$	☐

c) Leta 2015 se je v Nemčiji povprečno dnevno na novo pozidala površina 0,6 km^2.
Eno tipično nogometno igrišče je pravokotno in ima dolžini stranic 68 m in 105 m.

1) Izračunajte koliko takih nogometnih igrišč skupaj ima velikost 0,6 km^2. *[0/1 t.]*

Naloga 3

Taksi

a) Neka študija o izkoriščenosti velikoprostornih taksijev je pokazala naslednje verjetnosti:

Verjetnost, da se pri neki vožnji s taksijem prevaža natanko 5 potnikov, znaša 8 %.
Verjetnost, da se pri neki vožnji s taksijem prevaža 6 ali več potnikov, znaša 7 %.

Z naslednjim izrazom se za neko slučajno izbrano vožnjo s taksijem izračuna verjetnost za neki dogodek E.

$P(E) = 0{,}08 + 0{,}07$

1) S križcem označite opis, ki je ustrezen za E. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

Prevaža se več kot 5 potnikov.	☐
Prevaža se več kot 6 potnikov.	☐
Prevaža se natanko 6 potnikov.	☐
Prevaža se najmanj 5 potnikov.	☐
Prevaža se najmanj 6 potnikov.	☐

Verjetnost, da se prevaža natanko 1 potnik, znaša za vsako vožnjo s taksijem 31 %.
Preučuje se neki slučajni vzorec 30 voženj s taksijem.

2) Izračunajte verjetnost, da se pri vsaj 8 od teh voženj s taksijem prevaža vsakič natanko 1 potnik. *[0/1 t.]*

b) Verjetnost, da se vožnja s taksije zgodi iz privatnih razlogov, znaša 83 %.
Verjetnost, da se vožnja s taksije zgodi iz službenih razlogov, znaša 17 %.

1) Izračunajte verjetnost, da se izmed 2 slučajno izbranih voženj s taksijem zgodi 1 iz privatnih razlogov in 1 iz službenih razlogov. *[0/1 t.]*

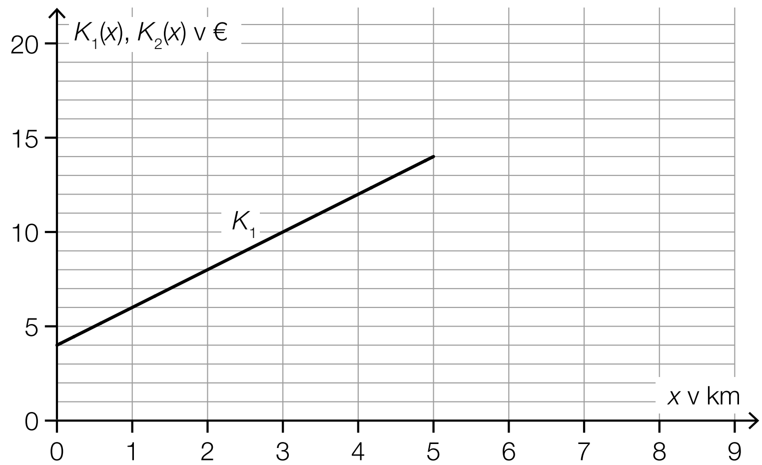
c) Stroške neke vožnje s taksijem je moč opisati z linearnimi funkcijami.

Za prvih 5 km je moč stroške opisati s funkcijo K_1.

$K_1(x) = G + p \cdot x$

x ... dolžina proge v km
$K_1(x)$ ... stroški pri dolžini proge x v €
G ... startnina (osnovnina) v €
p ... kilometrska tarifa v €/km

Graf funkcije K_1 je predstavljen na naslednji sliki.



1) S pomočjo gornje slike določite startnino G in kilometrsko tarifo p.

G = ____________________ €

p = ____________________ €/km *[0/1 t.]*

Od dolžine proge 5 km dalje je moč stroške opisati z linearno funkcijo K_2.

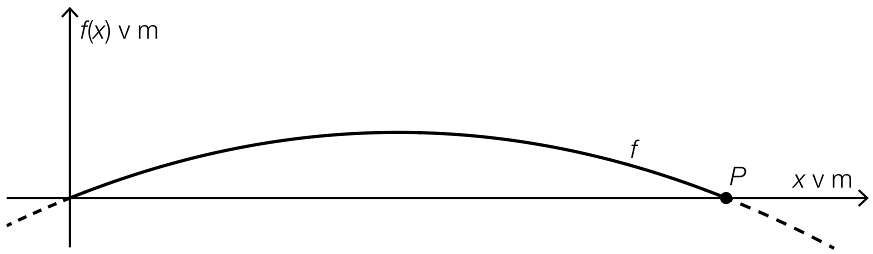
Kilometrska tarifa za funkcijo K_2 znaša 1 €/km.
Razen tega velja: $K_1(5) = K_2(5)$

2) V gornjo sliko vrišite graf funkcije K_2 za $x \geq 5$. *[0/1 t.]*

Naloga 4

Alpski tranzit

a) Na naslednji sliki je z grafom kvadratne funkcije f, pri $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$, modelno predstavljen višinski profil neke določene ceste.

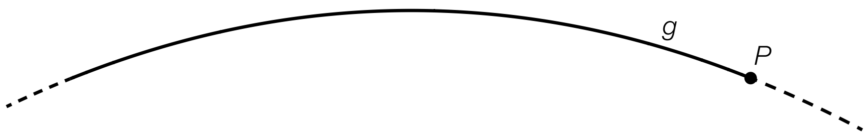


Graf funkcije f poteka skozi točko $P = (200|0)$.
Na mestu $x = 0$ ima graf funkcije f vzpon 10 %.

1) Nastavite sistem enačb za izračun parametrov a in b. *[0/1/2 t.]*

Višinski profil naj bo v koordinatnem sistemu modeliran s funkcijo g oblike $g(x) = a \cdot x^2$.

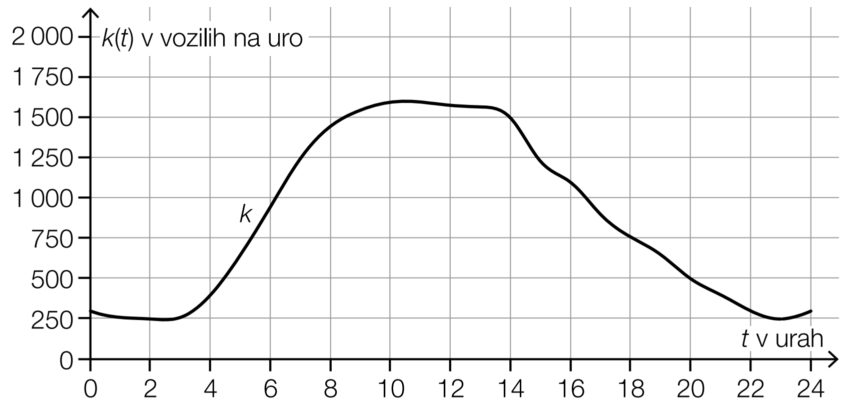
2) Na naslednji sliki vrišite koordinatni osi pripadajočega koordinatnega sistema. *[0/1 t.]*



b) Na nekem merilnem mestu Inntalske avtoceste se beleži število mimovozečih avtomobilov, ki peljejo.

Obdelavo meritve za neki določeni dan lahko približno opišemo s funkcijo k.

t ... čas v urah pri $t = 0$ za uro 00:00
$k(t)$ ... število vozil na uro ob času t



Vir podatkov: https://www.tirol.gv.at/fileadmin/themen/verkehr/verkehrsplanung/downloads/verkehrsberichte/VB_2017_web.pdf [25.10.2022].

1) S pomočjo gornje slike ocenite, koliko vozil pelje na tem merilnem mestu mimo v času od 8 ure do 14 ure.

≈ ______________________ vozil *[0/1 t.]*

2) Obema časovnima trenutkoma priredite vsakič ustrezno izjavo izmed A do D. *[0/1 t.]*

$t = 8$	
$t = 14$	

A	$k'(t) > 0$ in $k''(t) > 0$
B	$k'(t) > 0$ in $k''(t) < 0$
C	$k'(t) < 0$ in $k''(t) > 0$
D	$k'(t) < 0$ in $k''(t) < 0$

c) Preko prelaza Brenner se tovor prevaža ali po cesti ali pa po tirih. Leta 2016 je bilo preko prelaza Brenner po tirih prepeljano $1{,}34 \cdot 10^7$ t tovora. To ustreza 29 % celotnega tovornega transporta čez prelaz Brenner v letu 2016.

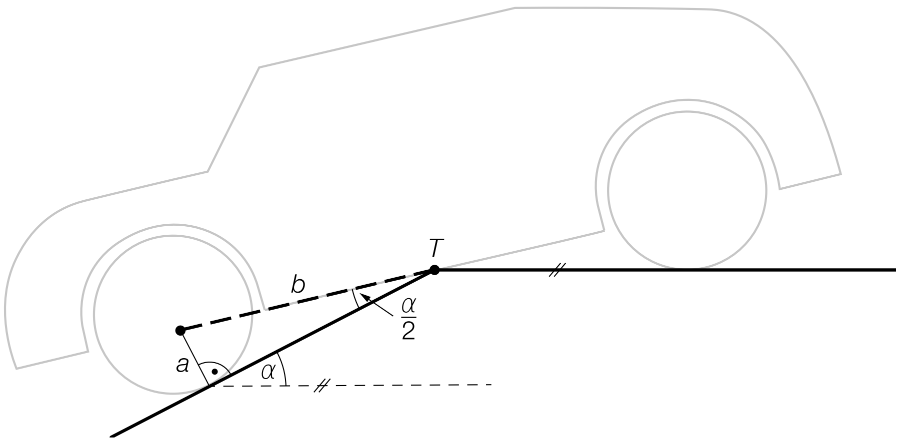
Celotni tovorni prevoz preko prelaza Brenner je bil v letu 2015 za 3 milijone t manjši kot v letu 2016.

1) Izračunajte celotni tovorni prevoz preko prelaza Brenner v letu 2015. *[0/1 t.]*

Naloga 5

Podzemna garaža

a) V neko podzemno garažo vodi klančina s konstantnim naklonskim kotom α. Pri vožnji preko te klančine se neki določeni avto dotakne klančine v točki T. (Glej naslednjo modelno sliko.)



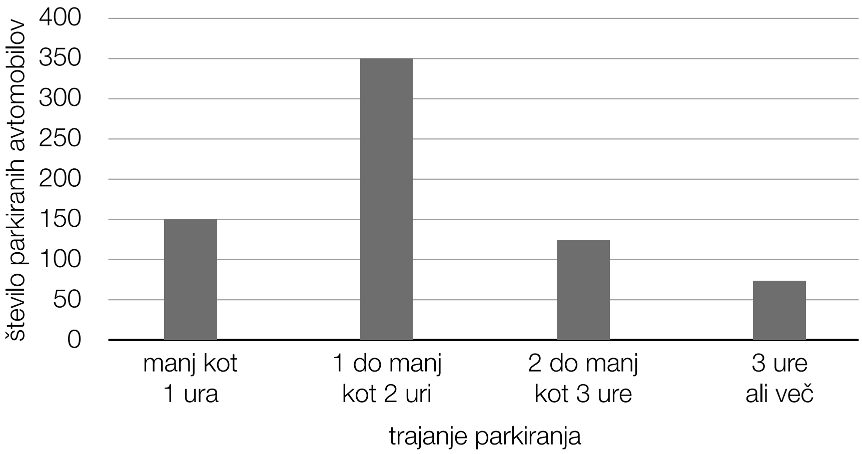
1) S pomočjo a in b nastavite formulo za izračun kota α.

α = ____ *[0/1 t.]*

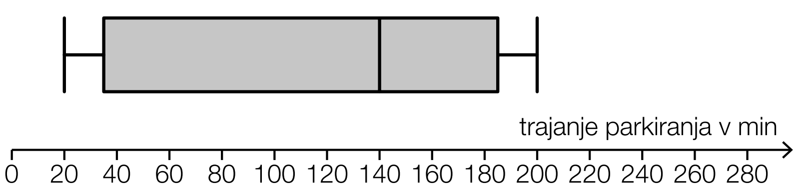
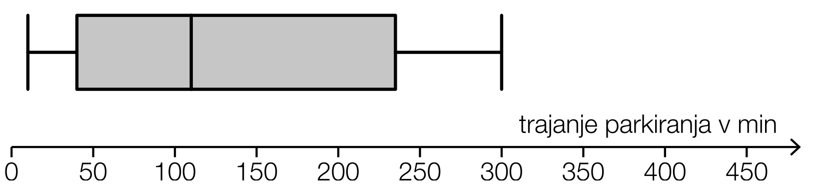
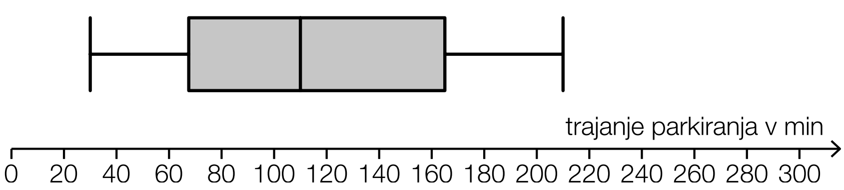
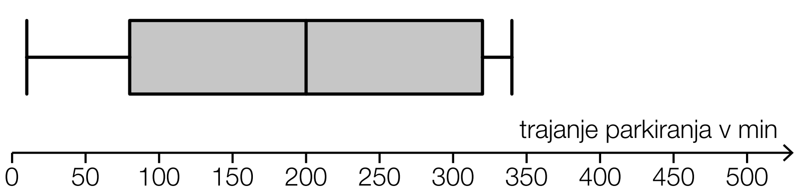
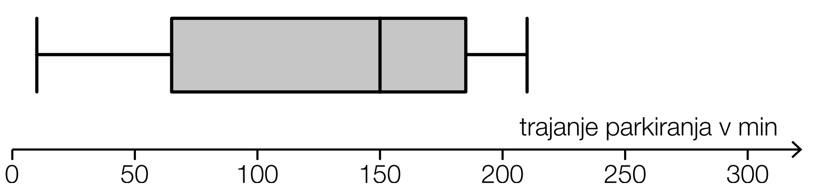
Velja: $a = 14$ cm in $b = 135$ cm

2) Izračunajte vzpon klančine v odstotkih. *[0/1 t.]*

b) Zbrani so bili podatki o trajanju parkiranja za skupno 700 avtomobilov, parkiranih v neki podzemni garaži.
Na osnovi te raziskave je bil sestavljen naslednji stolpčni diagram.



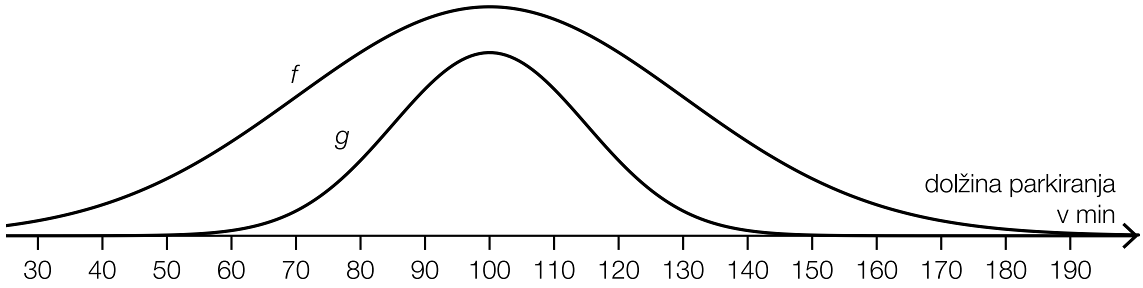
1) S križcem označite tisti Boxplot, ki ustreza temu stolpčnemu diagramu. *[1 izmed 5] [0/1 t.]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

c) V neki drugi podzemni garaži je trajanje parkiranja odstavljenih avtomobilov približno normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo μ = 100 min in standardnim odklonom σ = 30 min.

1) Izračunajte verjetnost, da znaša trajanje parkiranja nekega odstavljenega avtomobila v tej podzemni garaži najmanj 1 uro in največ 2 uri. *[0/1 t.]*

Graf pripadajoče funkcije gostote verjetnosti *f* je predstavljen na naslednji sliki.



Nekdo zatrjuje, da naj bi bil graf funkcije *g* prav tako graf neke funkcije gostote verjetnosti.

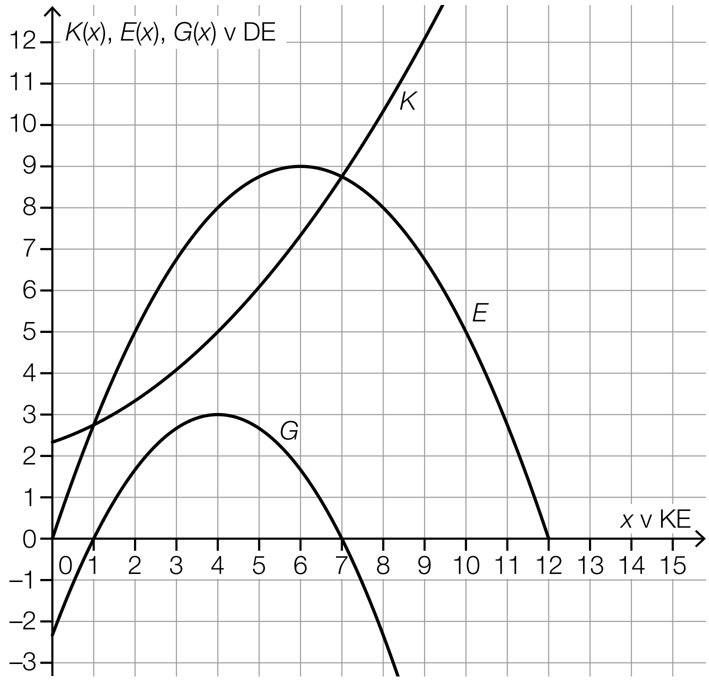
2) Utemeljite, zakaj je ta trditev napačna. *[0/1 t.]*

Naloga 6 (del B)

Stekleničke za pitje

Neko podjetje proizvaja stekleničke za pitje iz različnih materialov.

a) Na naslednji sliki so za proizvodnjo stekleničk iz stekla predstavljeni grafi funkcije stroškov *K*, funkcije izkupička *E* in funkcije dobička *G*.



1) Na gornji sliki na *x*-osi označite območje dobička. *[0/1 t.]*

2) S pomočjo gornje slike nastavite enačbo kvadratne funkcije izkupička *E*. *[0/1 t.]*

3) S križcem označite Cournotovo ceno. *[1 izmed 5]* *[0/1 t.]*

1 DE/KE	☐
2 DE/KE	☐
3 DE/KE	☐
4 DE/KE	☐
6 DE/KE	☐

b) Za stekleničke za pitje iz plemenitega jekla je znana funkcija stroškov K.

$K(x) = 0{,}035 \cdot x^3 - 0{,}32 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x + 4$

x ... proizvedena količina v KE
$K(x)$ ... stroški pri proizvedeni količini x v DE

1) Izračunajte tisto proizvedeno količino, pri kateri znašajo mejni stroški 2,8 DE/KE. *[0/1 t.]*

2) Izračunajte absolutno spremembo skupnih stroškov pri povečanju proizvodnje iz 8 KE na 9 KE. *[0/1 t.]*

3) Izračunajte obračaj stroškov. *[0/1 t.]*

c) Podjetje razvija nove termovke. V različnih poskusih je bilo raziskano, kako hitro se v teh termovkah ohladi čaj.
Ti poskusi so pokazali, da je temperatura čaja v nekem določenem časovnem trenutku merjenja približno normalno porazdeljena. Pričakovana vrednost znaša $\mu = 64$ °C.
Pri 4 % vseh poskusov je znašala temperatura čaja v tem časovnem trenutku merjenja manj kot 60 °C.

1) Izračunajte pripadajoči standardni odklon σ. *[0/1 t.]*

Pri enem od teh poskusov je bila ugotovljena naslednja funkcija T.

$T(t) = 20 + 77 \cdot 0{,}93^t$

t … čas od trenutka, ko je bil čaj natočen v stekleničko, v h
$T(t)$ … temperatura čaja ob času t v °C.

2) Navedite tisto temperaturo, ki jo je imel čaj v trenutku, ko je bil ob času $t = 0$ natočen v stekleničko.

____________________ °C *[0/1 t.]*

Naloga 7 (del B)

Financiranje prenove

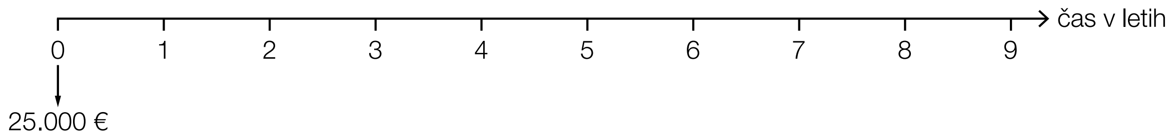
Maria in Johanna prenavljata njuno skupno stanovanje in za financiranje prenove potrebujeta kredit v višini 25.000 €.

a) Maria premišlja o varianti odplačevanja.

Premišlja, da bi kredit v višini 25.000 € poravnali z naslednjimi odplačili:

- enkratno odplačilo v višini 8.000 €, ki se izvrši 2 leti po izplačilu kredita
- 3 letni obroki v višini vsakič 6.500 €, začenši 3 leta po enkratnem odplačilu

1) Na naslednjo časovno os vnesite vsa odplačila. *[0/1 t.]*



2) Nastavite enačbo, s katero je moč izračunati pripadajočo letno obrestno mero *i*. *[0/1 t.]*

b) Johanna premišlja o eni drugi varianti odplačevanja.

Premišlja, da bi kredit v višini 25.000 € poravnali z naslednjimi odplačili:

- 5 letnih obrokov v višini vsakič 5.000 €, začenši 1 leto po izplačilu kredita
- plačilo ostanka dolga, ki nastopi 1 leto po plačilu zadnjega letnega obroka

Obrestna mera znaša 3 % p. a.

1) Izračunajte preostanek dolga. *[0/1 t.]*

c) Maria in Johanna dobita od njune banke odplačilni načrt za odplačilo kredita z enakimi mesečnimi anuitetami.
V naslednji preglednici je predstavljen izsek iz tega odplačilnega načrta.

mesec	obrestni delež	razdolžnina	mesečna anuiteta	ostanek dolga
37	26,06 €	423,94 €	450,00 €	9.998,09 €
38			450,00 €	

1) Izračunajte mesečno obrestno mero za mesec 37. *[0/1 t.]*

Za mesec 38 znaša mesečna obrestna mera 0,2 %.

2) Izpopolnite vrstico za mesec 38. *[0/1 t.]*

d) Za kredit v višini 25.000 € neka druga banka Marii in Johanni ponuja odplačevanje z mesečno obrestno mero 0,375 %.
Z banko se dogovarjata o odlogu odplačila.

1) Izračunajte po koliko mesecih brez odplačevanja, bi ostanek dolga prvič presegel 30.000 €. *[0/1 t.]*

Maria in Johanna pa želita zdaj od vsega začetka ob koncu vsakega meseca odplačevati natanko toliko, da bo ostanek dolga ob koncu vsakega meseca enak izhodiščnemu znesku kredita 25.000 €.

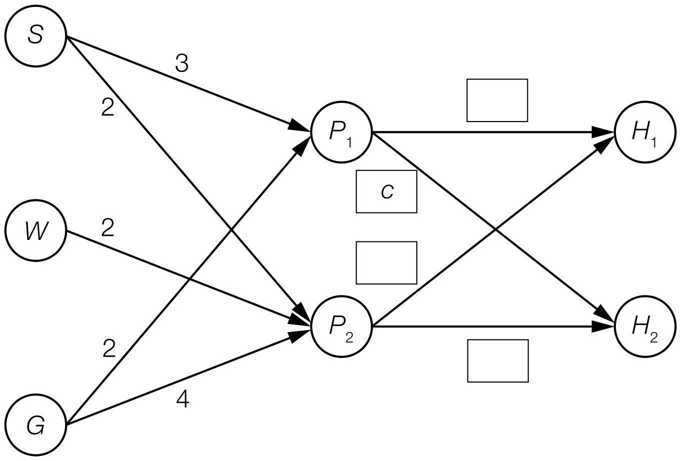
2) Ugotovite kako visoka morajo biti pri tem mesečna odplačila. *[0/1 t.]*

Naloga 8 (del B)

Teniške nogavice

Neki proizvajalec športnih artiklov med drugim proizvaja črne (*S*), bele (*W*) in sive (*G*) teniške nogavice in jih prodaja kot posamične pare, kakor tudi v večjih pakiranjih (P_1 in P_2).

a) Naslednji gozinto-graf ponazarja potrebo po parih teniških nogavic za posamezni večji pakiranji, ki sta kasneje v različnih količinah dobavljeni dvema prodajalcema H_1 in H_2.



3×2-matrika $\boldsymbol{A}$ opisuje potrebo po parih teniških nogavic za vsakokratni večji pakiranji.

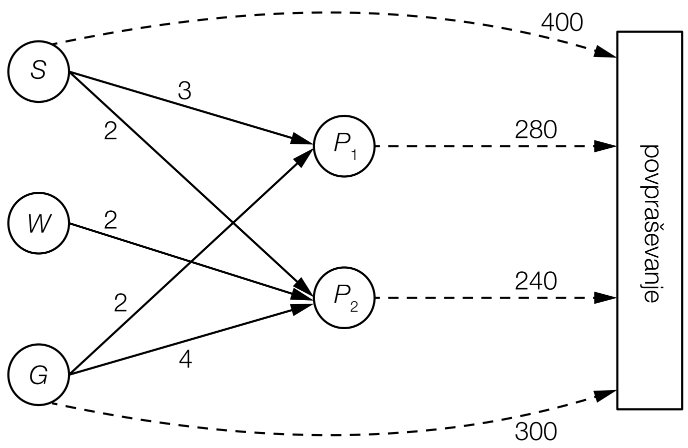
1) Določite matriko $\boldsymbol{A}$. *[0/1 t.]*

Matrika $\boldsymbol{B}$ opisuje potrebo po večjih pakiranjih za prodajalca H_1 in H_2.

$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

2) V gornji gozinto-graf vnesite pravilne elemente matrike $\boldsymbol{B}$ v za to predvidene okvirčke. *[0/1 t.]*

b) V spletni trgovini tega proizvajalca športnih artiklov je pri teniških nogavicah povpraševanje tudi za posamične pare.
Na naslednji sliki je s črtkanimi puščicami predstavljeno celotno povpraševanje v nekem mesecu.



Kvadratna 5×5-matrika $\boldsymbol{V}$ opisuje prepletenost proizvodnje med posamičnimi pari teniških nogavic in večjimi pakiranji (v zaporedju S, W, G, P_1, P_2).

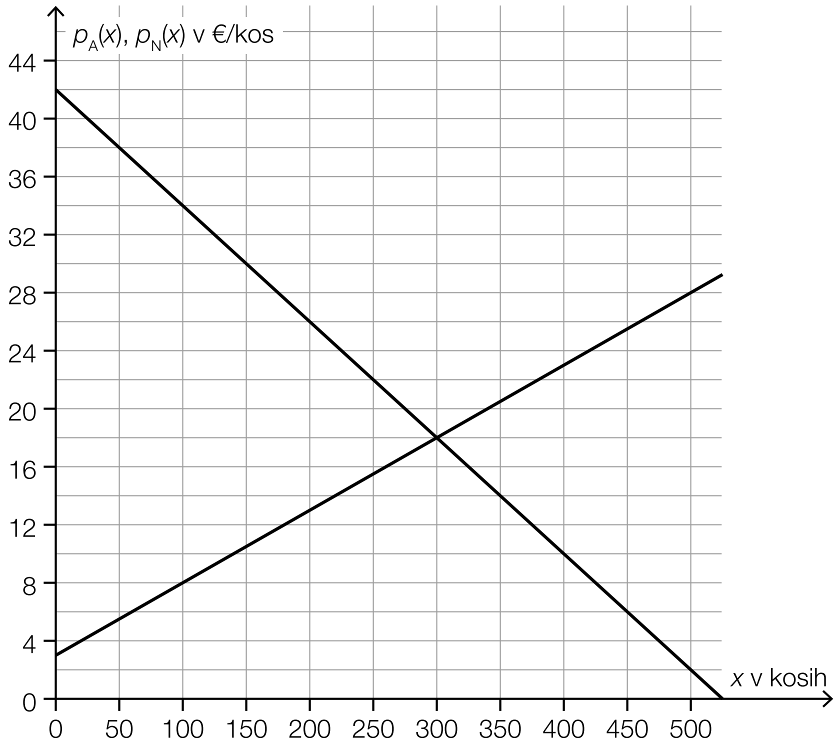
1) Določite matriko $\boldsymbol{V}$. *[0/1 t.]*

Vektor $\vec{\boldsymbol{n}}$ opisuje povpraševanje po posamičnih parih teniških nogavic in po večjih pakiranjih (v zaporedju S, W, G, P_1, P_2).

2) Določite vektor $\vec{\boldsymbol{n}}$. *[0/1 t.]*

3) Za podano povpraševanje ugotovite vsakokratno število potrebnih parov črnih, belih in sivih teniških nogavic. *[0/1 t.]*

c) Proizvajalec športnih artiklov ve, kako se obnašata ponudba in povpraševanje za večje pakiranje P_1. Na naslednji sliki sta predstavljena graf cenovne funkcije ponudbe p_A in graf cenovne funkcije povpraševanja p_N.



1) V naslednjem stavku dopolnite vrzeli v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezni del stavka tako, da nastane pravilna izjava. *[0/1 t.]*

Enačba ___①___ se glasi ___②___ .

①	
cenovne funkcije ponudbe	☐
cenovne funkcije povpraševanja	☐
funkcije izkupička	☐

②	
$y = -0{,}08 \cdot x^2 + 3 \cdot x$	☐
$y = -0{,}05 \cdot x + 3$	☐
$y = -0{,}08 \cdot x + 42$	☐

2) Iz gornje slike odčitajte ravnotežno ceno.

__________ €/kos *[0/1 t.]*

Cena se kasneje določi na 14 €/kos. S tem preseže povpraševanje ponudbo za neko določeno število.

3) Na gornji sliki označite tisto daljico, ki ustreza temu številu. *[0/1 t.]*