

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

10. Mai 2016

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 4)

Korrekturheft

Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im Erlass mit der Geschäftszahl BMBF-17.100/0006-II/2015 des Bundesministeriums für Bildung und Frauen.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A (KA)* umfasst die unabhängig¹ erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B (KB)* umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufen 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche“ eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen“ wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend“ (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punktermittlung soll die Arbeit der Kandidatin/des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist von der Prüferin/vom Prüfer ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

43–48 Punkte	Sehr gut
37–42 Punkte	Gut
31–36 Punkte	Befriedigend
22–30 Punkte	Genügend
0–21 Punkte	Nicht genügend

¹ Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur ein möglicher Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.
2. Der Lösungsschlüssel ist **verbindlich** anzuwenden unter Beachtung folgender Vorgangsweisen:
 - a. Punkte sind nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung vollständig erfüllt ist.
 - b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.
 - c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin/vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.
 - d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin/vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.
 - e. Werden von der Kandidatin/vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.
 - f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin/des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.
 - g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.
 - h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.
 - i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.
3. Sind Sie sich als Korrektor/in über die Punktevergabe nicht schlüssig, können Sie eine Korrekturanfrage an das BIFIE (via Telefon-Hotline oder Online-Helpdesk) stellen.

Aufgabe 1

Gondelbahn auf den Untersberg

Möglicher Lösungsweg

a) Die mittlere Steigung des Tragseils der Gondelbahn auf den Untersberg beträgt rund 0,52.

b) Steigung: $k = \frac{1382 - 1148}{1712 - 1385} = 0,7155\dots$

Steigungswinkel: $\alpha = \arctan(k) = 35,58\dots^\circ \approx 35,6^\circ$

Der Steigungswinkel des Seilverlaufs in diesem Abschnitt ist kleiner als 40° .

c) Gleichungssystem:

I. $456 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

II. $740 = a \cdot 740^2 + b \cdot 740 + c$

III. $1148 = a \cdot 1385^2 + b \cdot 1385 + c$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$a = 0,0001796\dots \approx 0,000180$

$b = 0,2508\dots \approx 0,251$

$c = 456$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KA)

b) 1 × D: für die richtige Überprüfung (KA)

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems (KA)

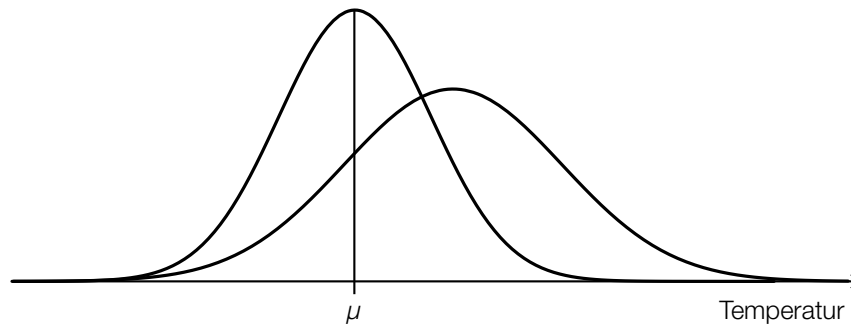
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten (KB)

Aufgabe 2

Klimawandel und Ozon

Möglicher Lösungsweg

a)



b) $1 - 0,9917 = 0,0083$

Die Ozonmenge pro Quadratmeter nimmt jährlich um 0,83 % ab.

Zur berechneten Zeit t hat sich die Ozonmenge pro Quadratmeter halbiert (Halbwertszeit).

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für die richtige Darstellung der Erhöhung des Erwartungswertes
(Maximumstelle weiter rechts) (KA)
1 × A2: für die richtige Darstellung der Erhöhung der Standardabweichung
(Maximalwert niedriger und Kurve breiter) (KB)
- b) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der jährlichen Abnahme in Prozent (KA)
1 × C2: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KA)

Aufgabe 3

Section-Control

Möglicher Lösungsweg

a) $s = 6 \text{ km}$

$$v_1 = 60 \text{ km/h: } t_1 = \frac{s}{v_1} = 0,1 \text{ h}$$

$$v_2 = 66 \text{ km/h: } t_2 = \frac{s}{v_2} = 0,09 \text{ h}$$

90 % von 0,1 h sind exakt 0,09 h. Das ist weniger als t_2 .

b) $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1000 \text{ m}}{70 \text{ s}} = 14,285... \text{ m/s} \approx 14,29 \text{ m/s}$

Die Fahrzeit für die erste Wegehälfte beträgt 70 Sekunden. Die Fahrzeit für die zweite Wegehälfte beträgt nur 40 Sekunden. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Wegehälfte geringer.

c) Der Flächeninhalt des Trapezes entspricht dem zurückgelegten Weg: $s = \frac{v_A + v_E}{2} \cdot t$.

$$v_A = 2 \cdot \frac{s}{t} - v_E$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis (KA)
- b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Geschwindigkeit auf der ersten Wegehälfte (KA)
1 × D: für eine richtige Argumentation (KB)
- c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel (KB)

Aufgabe 4

Blutkreislauf

Möglicher Lösungsweg

- a) Umwandlung: $5 \text{ L} = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$
Blutzellen in $5 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$: $25 \cdot 10^{12} + 15 \cdot 10^{11} + 3 \cdot 10^{10} = 2,653 \cdot 10^{13}$
Anzahl der Blutzellen pro mm^3 : $\frac{2,653 \cdot 10^{13}}{5 \cdot 10^6} = 5,306 \cdot 10^6$

In 1 Kubikmillimeter Blut befinden sich rund 5,3 Millionen Blutzellen.

- b) $P(t) = k \cdot t + d$

t ... Alter in Jahren

$P(t)$... Pumpleistung des Herzens im Alter t in Litern pro Minute

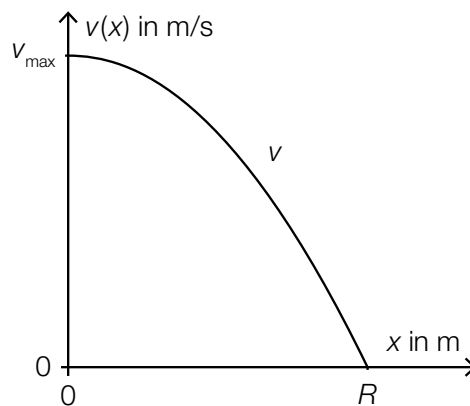
$$k = -\frac{2,5}{50} = -0,05$$

$$d = 5 - (-0,05) \cdot 20 = 6$$

$$P(t) = -0,05 \cdot t + 6$$

Pro Lebensjahr nimmt die Pumpleistung des Herzens um 0,05 Liter pro Minute ab.

- c)



Lösungsschlüssel

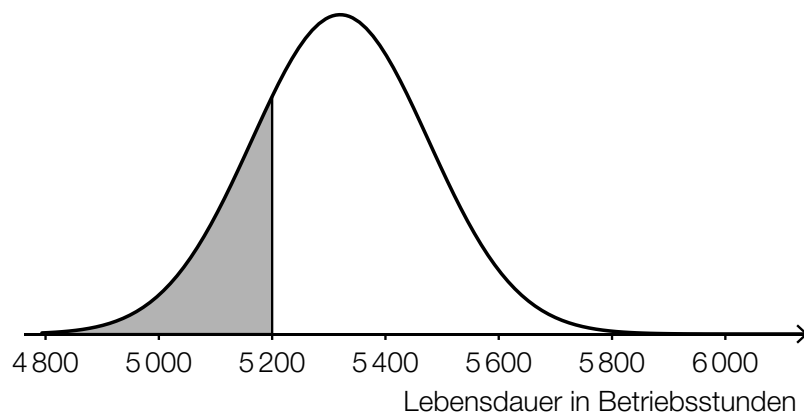
- a) 1 × B1: für die richtige Umwandlung von 5 Litern in mm^3 (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der Blutzellen pro mm^3 (KB)
- b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang (KB)
- c) 1 × A: für das richtige Skizzieren des Funktionsgraphen (Graph einer nach unten offenen quadratischen Funktion mit den richtigen Funktionswerten an den Stellen 0 und R) (KB)

Aufgabe 5

Batterien

Möglicher Lösungsweg

- a) Binomialverteilung: $n = 40, p = 0,02$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \leq 2) = 0,95432\dots \approx 95,43 \%$
- b) Der angegebene Ausdruck gibt den Erwartungswert für die Anzahl der defekten Batterien in dieser Lieferung an.
- c) Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
 $P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0,9 \Rightarrow [5063,4; 5576,6]$



Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
- b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung in diesem Sachzusammenhang (KB)
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Intervalls (KA)
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit (KA)

Aufgabe 6

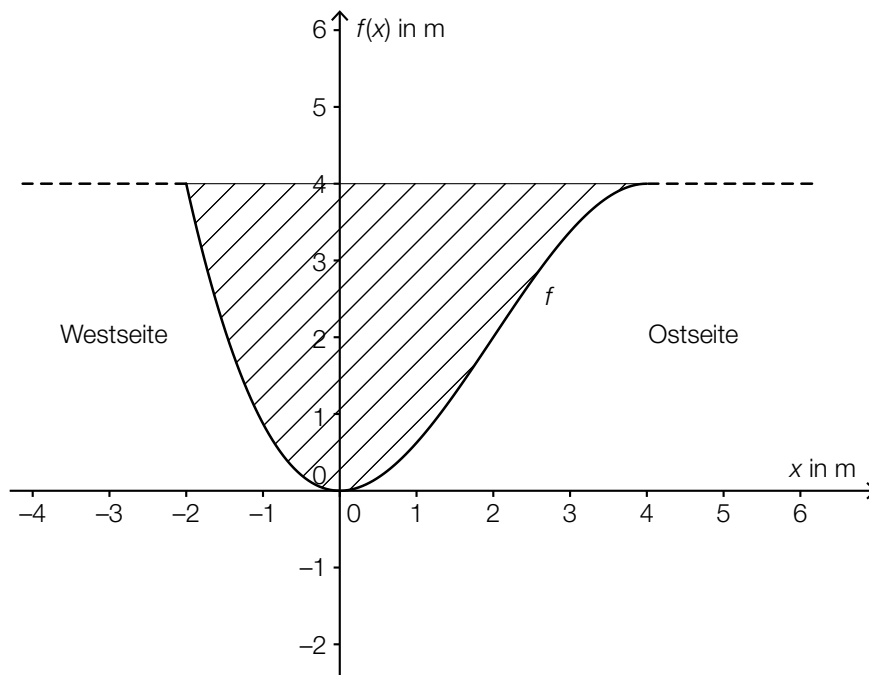
Am Fluss

Möglicher Lösungsweg

a) $f''(x) = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2}$

$$0 = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2$$

An der Stelle $x = 2$ steigt das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten an.



b) $\overline{CD} = \overline{AB} \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$
 $\overline{CD} = 26,1 \dots \text{ m} \approx 26 \text{ m}$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wendestelle der Funktion f
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass der Anstieg des Querschnittsprofils an der Ostseite an der Wendestelle am stärksten ist. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.) (KB)
1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Fläche (KA)
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Streckenlänge \overline{CD} (KA)

Aufgabe 7 (Teil B)

Förderbänder

Möglicher Lösungsweg

- a) $s'(0)$ ist die Geschwindigkeit des Werkstücks zum Zeitpunkt $t = 0$ s.

$$s''(t) = 6,4 \cdot e^{-4t} - 0,1 \cdot e^{-t}$$

$$s''(t) = 0 \Rightarrow t = \ln(4)$$

$$s'(\ln(4)) = 0,01875$$

Die Geschwindigkeit beträgt 0,01875 m/s.

- b) $A = \int_1^3 a(t) dt$

Dieser Flächeninhalt entspricht der Zunahme der Geschwindigkeit zwischen $t = 1$ s und $t = 3$ s.

- c) Anwendung von Faktorregel und Kettenregel

oder:

Multiplikation des Faktors 1,3 mit der inneren Ableitung

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
1 × A: für die richtige Modellbildung zur Berechnung der Geschwindigkeit (z. B. über die Nullstelle der 2. Ableitung oder einen grafischen Lösungsansatz) (KA)
1 × B: für das richtige Bestimmen der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt mit Beschleunigung null (KB)
- b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation des Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
- c) 1 × C: für das richtige Angeben der beiden Ableitungsregeln oder die richtige Beschreibung (KA)

Aufgabe 8 (Teil B)

Atemvolumen

Möglicher Lösungsweg

a) $A = 3 - 2,75 = 0,25$

$$\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$V(0) = 3 + 0,25 \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi)$$

$$\sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Der Beginn des Einatemvorgangs könnte auch mit $t \neq 0$ angesetzt werden. Die diesem Ansatz entsprechende Lösung für φ ist dann als richtig zu werten.

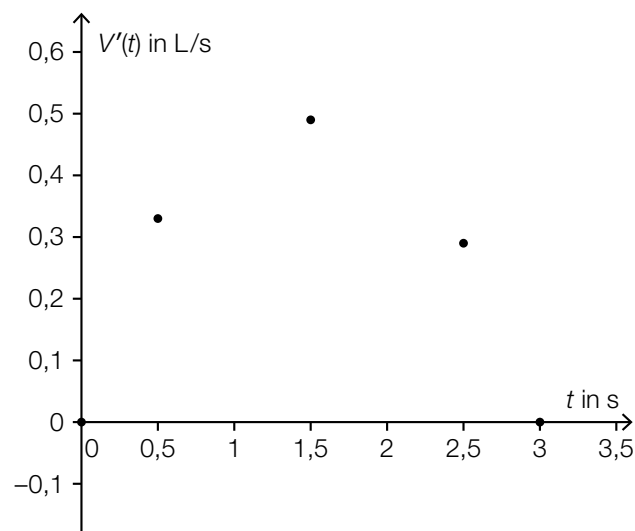
b) $V(t) = \int (0,4 \cdot \sin(1,6 \cdot t)) dt$

$$V(t) = -0,25 \cdot \cos(1,6 \cdot t) + C$$

$$V(0) = 2,4 \Rightarrow 2,4 = -0,25 + C \Rightarrow C = 2,65$$

$$V(t) = -0,25 \cdot \cos(1,6 \cdot t) + 2,65$$

c)



Ermitteln der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$V'(t) = -0,22 \cdot t^2 + 0,67 \cdot t + 0,018$$

Es handelt sich um eine Einatemphase, weil die momentane Änderungsrate des Atemvolumens im betrachteten Intervall immer positiv ist.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für das richtige Angeben des Parameters A (KA)
1 × A1: für das richtige Angeben des Parameters ω (KA)
1 × A2: für das richtige Angeben des Parameters φ (KB)
Der Beginn des Einatemvorgangs könnte auch mit $t \neq 0$ angesetzt werden. Die diesem Ansatz entsprechende Lösung für φ ist dann als richtig zu werten.
- b) 1 × A: für eine richtige Modellbildung (unbestimmtes Integral) (KA)
1 × B: für das richtige Ermitteln der Funktion unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (KB)
- c) 1 × B1: für die richtige Darstellung der Messpunkte (KA)
1 × B2: für das richtige Ermitteln der quadratischen Ausgleichsfunktion (KA)
1 × D: für die richtige Begründung (KB)

Aufgabe 9 (Teil B)

LED-Lampen

Möglicher Lösungsweg

- a) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$f(x) = 63,97 \cdot x - 20,06$$

x ... Leistung in Watt (W)

$f(x)$... Lichtstrom bei der Leistung x in Lumen (lm)

$$f(15) = 939,5... \approx 940$$

Gemäß diesem Modell ist für eine 15-Watt-LED-Lampe ein Lichtstrom von rund 940 lm zu erwarten.

- b) Zweiseitigen 95%-Vertrauensbereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen: $\bar{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Berechnung von \bar{x} mittels Technologieeinsatz: $\bar{x} = 951$ Lumen

$$\sigma = 75 \text{ Lumen}$$

$$n = 8$$

$$\alpha = 5 \%$$

$$u_{0,975} = 1,959...$$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich in Lumen: $899 \leq \mu \leq 1003$.

Der Ausdruck $u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bestimmt die Breite des Vertrauensbereichs.

Eine Vervierfachung des Stichprobenumfangs n bedeutet für die Breite:

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der linearen Regressionsfunktion (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Lichtstroms einer 15-Watt-LED-Lampe (KB)
- b) 1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Vertrauensbereich mithilfe der Normalverteilung) (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Vertrauensbereichs (KB)
1 × D: für den richtigen Nachweis (KB)

Aufgabe 10 (Teil B)

Vektorgrafiken

Möglicher Lösungsweg

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 200 \\ -150 \end{pmatrix}$

Normalvektor zu \vec{AB} mit halber Länge: $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 75 \\ 100 \end{pmatrix}$

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 325 \\ -150 \end{pmatrix}$$

Der Punkt C hat die Koordinaten (325|-150).

*Auftragen des Normalvektors in die andere Richtung ist ebenfalls zulässig. Man erhält dann:
C = (175|-350).*

b) $\vec{EH} = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{EH}_1 = \begin{pmatrix} 130 \\ 75 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{EH} \cdot \vec{EH}_1}{|\vec{EH}| \cdot |\vec{EH}_1|} \Rightarrow \alpha = 29,98...^\circ \approx 30^\circ$$

c) Für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{n}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = -a_x \cdot a_y + a_y \cdot a_x = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ist, stehen sie normal aufeinander.

d) $s_0(1) = s_1(1) = 1$

$$s_0'(x) = -2 \cdot x^2 + \frac{5}{3} \Rightarrow s_0'(1) = -\frac{1}{3}$$

$$s_1'(x) = 4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + \frac{23}{3} \Rightarrow s_1'(1) = -\frac{1}{3}$$

Die beiden Funktionen haben also an der Stelle $x = 1$ den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung, der Übergang ist also knickfrei.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für die richtige Modellbildung (Ermitteln des Normalvektors mit halber Länge) (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten des Punkts C für eines dieser Rechtecke (KB)
- b) 1 × B: für den richtigen rechnerischen Nachweis (KA)
- c) 1 × D: für einen richtigen Nachweis (KA)
- d) 1 × D: für den richtigen Nachweis (Funktionswert und Steigung) (KA)