Aufgabe 25 (Teil 2)

Bogenschießen

a1) $g: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 6{,}7 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Die Angabe von „$t \in \mathbb{R}$" ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von g.

b1) $h = 2 \cdot r \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel zur Berechnung von h.

c1) $P(\text{„Paul trifft mindestens 1 dieser 3 Ziele"}) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}865$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Paul mindestens 1 dieser 3 Ziele trifft, beträgt 86,5 %.

c2) $E(X) = 10 \cdot \frac{2}{5} = 4$

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von $E(X)$.

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Bungee-Jumping

a1) $h(0) = a \cdot \left(e^{-0{,}03 \cdot 0} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{6}\right) + 1\right) = 90$

$2 \cdot a = 90$
$a = 45$

a2) $h(t) = 70$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 1{,}803...$ $t_2 = 10{,}663...$ $t_3 = 13{,}149...$
$d = t_1 + (t_3 - t_2) = 4{,}289...$

a3) $h'(t) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

lokales Minimum: $T_1 = (5{,}890...|7{,}351...)$
lokales Maximum: $H_1 = (11{,}890...|76{,}446...)$
$76{,}446... - 7{,}351... = 69{,}095...$

Sabine wird rund 69,1 m nach oben gezogen, bevor sie erneut fällt.

a4)

①	
$h''(t_1) = 0$	☒

②	
$\lvert h'(t_1)\rvert$	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *a*.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von *d*.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen.
a4) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Taschenlampen

a1) $3 + 19{,}5 = 4{,}1 + n$
$n = 18{,}4$
$y_B = \sqrt{4{,}1^2 - (18{,}4 - 17{,}5)^2} = 4$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von y_B.

b1)

Die Taschenlampe ist defekt und hat die falsche Farbe.	C
Die Taschenlampe hat die richtige Farbe.	A
Die Taschenlampe ist nicht defekt, sie hat die richtige Farbe und sie hat keine Aufbewahrungstasche.	F
Die Taschenlampe weist mindestens 1 dieser 3 Fehler auf.	B

A	$0{,}98$
B	$1 - (1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99$
C	$p_1 \cdot 0{,}02$
D	$1 - p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
E	$p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
F	$(1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}01$

b1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

c1) $K(x) = 0{,}11 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 42$

c2) $G(x) = a \cdot x - (0{,}11 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 42)$
$G(5) \geq 100$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a \geq 29{,}65$

Der kleinstmögliche Preis beträgt 29,65 GE/ME.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von K.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen.

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Belastungstests

a1) $60 \cdot [3 \cdot (300 + 320 + 340 + 360) + 380] = 260\,400$

Die von Katharina im Zeitintervall [30; 43] verrichtete Arbeit beträgt 260 400 J.

a2) $c_1(t) = 1{,}95$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 28{,}9...$
$P(28{,}9...) = 280$

Die Leistung bei einer Laktatkonzentration von 1,95 mmol/L beträgt 280 Watt.

a3) Bedeutung der Zahl 2: Die Herzfrequenz nimmt pro Minute um 2 Schläge/min zu.
Bedeutung der Zahl 85: Die Herzfrequenz zu Beginn des Belastungstests beträgt 85 Schläge/min.

Das Angeben der Zahlen 2 und 85 ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der verrichteten Arbeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Leistung.
a3) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung der beiden Zahlen, ein halber Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung von nur einer Zahl, jeweils unter Angabe der zugehörigen Einheiten.

b1) t_{max} ... Zeitpunkt des maximal erreichten Wertes der Laktatkonzentration

$c_2'(t_{max}) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_{max} = 6{,}155...$
$c_2(6{,}155...) = 17{,}69...$
$\frac{17{,}69...}{2} = c_2(t_1)$
$t_1 = 21{,}1...$ min

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Schwimmbecken

a1)

①	
quadratische Funktion	☒

②	
lineare Funktion	☒

a1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

b1) $T = \frac{38}{p}$

b2) $\left|\int_0^6 W(t)\,\mathrm{d}t\right| = 11{,}625$

Die Abnahme der Wassermenge im Zeitintervall [0; 6] beträgt 11,625 m^3.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Abnahme der Wassermenge, wobei –11,625 m^3 ebenso als richtig zu werten ist.

c1) $f''(x) = 0$

$x_1 = 2{,}5$

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Stelle x_1.

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Fitnessuhren

a1) $\sqrt{3\,100^2 - 1\,140^2} = 2\,882{,}7...$

$a = \frac{1\,140}{2\,882{,}7...} = 0{,}395...$

$a = 39{,}5...\ \%$

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von a.

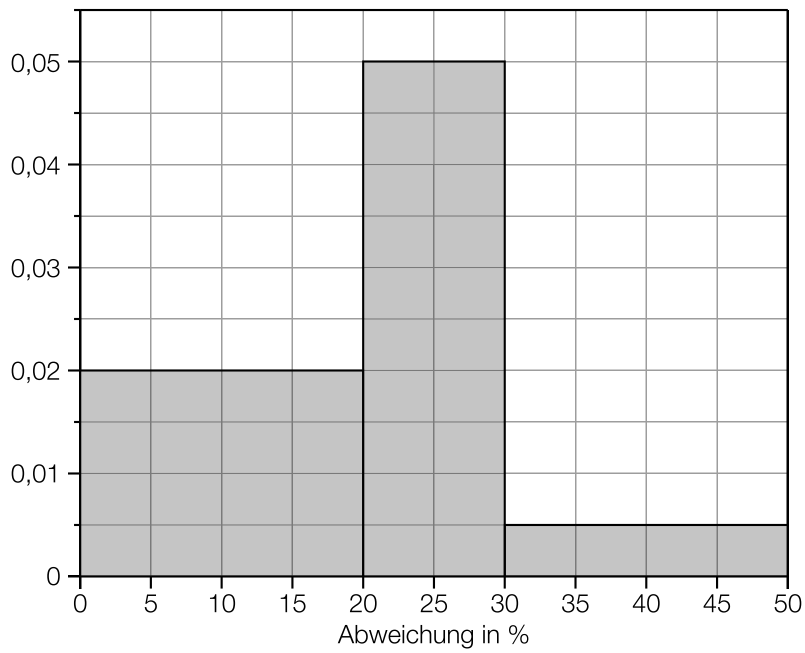
b1)

①	
$(1-p)^{160}$	☒

②	
$1 - \left[\binom{160}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{160} + \binom{160}{1} \cdot p \cdot (1-p)^{159}\right]$	☒

b1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

c1)



c2) Sortiert man die zugrunde liegende Datenliste aufsteigend, dann ist der Median das arithmetische Mittel des 30. und 31. Wertes. Da beide im Intervall [20; 30) liegen, liegt auch das arithmetische Mittel dieser beiden Werte in diesem Intervall.

c1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Histogramms.
c2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung)

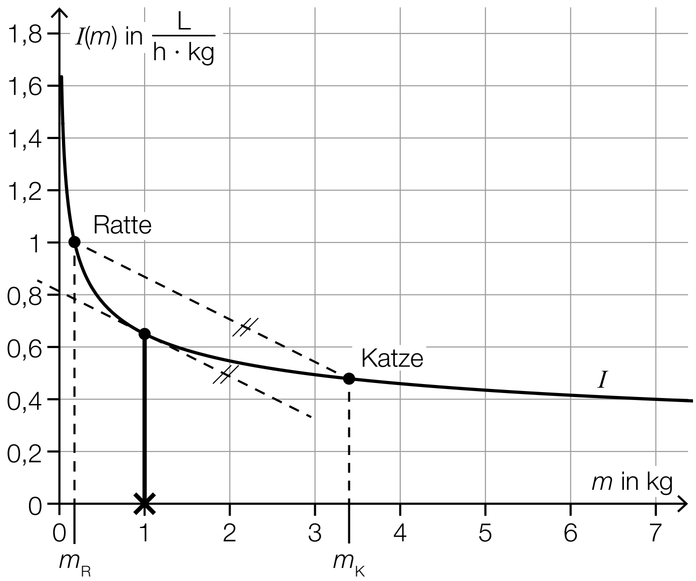
Sauerstoffverbrauch von Säugetieren

a1) $2^{0,75} = 1,6817...$

Der Sauerstoffverbrauch dieses Hundes ist um rund 68,2 % höher als der dieser Katze.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.

b1)



$m_1 = 1$ kg

Toleranzbereich in kg: [0,8; 1,2]

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von m_1.

c1) $\int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(u(t_1) + d) \cdot t_1}{2}$

c2) Der Ausdruck gibt den Sauerstoffverbrauch in L im Intervall [0; t_1] an.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

c2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Flugreisen

a1) $a = 0{,}14$

$b = \sqrt[62]{\frac{28{,}95}{0{,}14}} = 1{,}089...$

a2) $\frac{31{,}73 - N(63)}{31{,}73} = 0{,}0056... = 0{,}56...\ \%$

Die mit N ermittelte Anzahl der Fluggäste für das Jahr 2018 weicht um weniger als 1 % von der tatsächlichen Anzahl der Fluggäste ab.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von a und b.
a2) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.

b1) $n = \frac{36\,206\,642}{319\,945} - \frac{31\,725\,019}{296\,852} = 6{,}29...$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von n.

c1)

Auf dieser Flugstrecke wurden mehr als doppelt so viele Fluggäste befördert wie auf der Flugstrecke *Wien–Moskau*.	E
Auf dieser Flugstrecke war die Anzahl der unbesetzten Sitzplätze am kleinsten.	B
Auf dieser Flugstrecke war die Anzahl der beförderten Fluggäste größer als 650 000 und kleiner als 1,1 Millionen.	A
Auf dieser Flugstrecke war mehr als ein Drittel der angebotenen Sitzplätze unbesetzt.	C

A	*Wien–Berlin*
B	*Wien–Madrid*
C	*Wien–Brüssel*
D	*Wien–Kopenhagen*
E	*Wien–London*
F	*Wien–Rom*

c1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Triathlon

a1) $B_1 = (0|360{,}5\ldots)$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der y-Koordinate von B_1.

b1) Es wird die verbliebene Wegstrecke von Tanja bis zum Ziel (des Radbewerbs) in km berechnet.

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

c1) Zeitdifferenz: 2 h 24 min 18 s = 2,405 h

$\frac{42{,}195}{2{,}405} = 17{,}54\ldots$

Michaels Durchschnittsgeschwindigkeit im Laufbewerb beträgt rund 17,5 km/h.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Durchschnittsgeschwindigkeit.

d1) $n = \frac{f(40) - f(0)}{40} = 61{,}425$

d1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von n.

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung)

„Mensch ärgere Dich nicht“

a1) $\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{495} = 0{,}0020...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 gezogenen Spielfiguren rot sind, beträgt rund 0,2 %.

a2) $u = \frac{4}{70} = \frac{2}{35}$

$v = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 gezogenen Spielfiguren rot sind.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von u und v.

b1)

$\binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}6^{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}4^{\frac{n}{2}}$	A
$1 - 0{,}4^n - n \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^{n-1}$	B
$1 - 0{,}6^n$	E
$n \cdot 0{,}6^{n-1} \cdot 0{,}4$	D

A	Isabella gewinnt genau die Hälfte der n Partien.
B	Isabella gewinnt mindestens 2 der n Partien.
C	Isabella verliert mehr als die Hälfte der n Partien.
D	Isabella verliert genau 1 der n Partien.
E	Isabella verliert mindestens 1 der n Partien.
F	Isabella gewinnt höchstens 1 der n Partien.

b2) $p = 0{,}6 \quad n = 14$
$\mu = 8{,}4$
$\sigma = 1{,}83...$
$[\mu - \sigma; \mu + \sigma] = [6{,}56...; 10{,}23...]$
$P(7 \leq Y \leq 10) = 0{,}7255...$

b1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Bienenhaltung in Österreich

a1) Im Jahr 2017 betrug die durchschnittliche Anzahl der Bienenvölker pro Imker/in (in Österreich) rund 13.

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) I: $f(0) = 26\,063 = d$
II: $f(4) = 30\,237$

$16 \cdot c + 26\,063 = 30\,237$
$c = 260{,}875$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von c und d.

c1) $g(t) = 347\,128 \cdot 0{,}84^t$

c2) $0{,}5 = 0{,}84^t$
$t = 3{,}9...$

Die Zeitdauer beträgt rund 4 Jahre.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von g.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeitdauer.

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Teich

a1) $\left(\frac{129}{10} + \frac{129}{6}\right) \cdot T = 129$

$T = 3{,}75$ h

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von T.

b1) $d(z) = \frac{129}{z}$

b2) $d(6) = 21{,}5$

$\int_{11{,}5}^{21{,}5} h'(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}40...$

Die Höhe der Wasseroberfläche steigt in den letzten 10 h der Befüllung um rund 0,4 m an.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von d.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Anstiegs der Höhe der Wasseroberfläche.

c1)

Die Wassermenge im Teich nimmt ab.	C
Die Wassermenge im Teich nimmt immer schneller zu.	A
Die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich nimmt ab.	B
Die Wassermenge im Teich nimmt zu.	F

A	(0; 3)
B	(3; 10)
C	(8; 12)
D	(3; 12)
E	(8; 10)
F	(0; 8)

c1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Flugreisen

a1) $\frac{147 - 54}{54} = 1{,}7\dot{2}$

Die Parkgebühren am Flughafen Innsbruck waren um rund 172 % höher als die Parkgebühren am Flughafen Salzburg.

a2) $G = 6 \cdot D - K - 54 - L - W - 147$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel für G.

b1) $32 \cdot \frac{70}{2} = 1\,120$

Die Länge des bis zum Abheben zurückgelegten Weges beträgt 1 120 m.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge des zurückgelegten Weges.

c1)

①	
höchstens	☒

②	
122	☒

c1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Passwörter

a1) $t = \frac{n^k}{60 \cdot 60 \cdot 10^9} \quad \left(= \frac{n^k}{3{,}6 \cdot 10^{12}}\right)$

a2)

①	
Potenzfunktion	☒

②	
Exponentialfunktion	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

b1) $\left(\frac{26}{36}\right)^8 = 0{,}0740...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort nur aus Buchstaben besteht, beträgt rund 7,4 %.

b2) $\left(\frac{26}{36}\right)^8 + 8 \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^7 \cdot \frac{10}{36} = 0{,}3017...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort höchstens 1 Ziffer enthält, beträgt rund 30,2 %.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort nur aus Buchstaben besteht.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort höchstens 1 Ziffer enthält.

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Hunde in Österreich

a1) Oberösterreich

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Bundeslands.

b1) „Große Hunde" haben im Alter von 4 Monaten eine Masse von rund 30 kg.
Toleranzintervall: [28 kg; 31 kg]

„Sehr große Hunde" haben im Alter von rund 9,5 Monaten eine Masse von 80 kg.
Toleranzintervall: [9 Monate; 10 Monate]

b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der beiden Sätze, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

c1) minimale Masse im Alter von 2 Monaten: 7 kg
$\frac{3}{7} = 0{,}428... = 42{,}8...\ \%$
Die minimale Masse von Labradorhündinnen im Alter von 2 bis 3 Monaten nimmt um rund 43 % zu.

c2) $m(7) = 20$
$k = 0{,}228...$
$m(12) = 23{,}40...$
$24 - m(12) = 0{,}59...$

Die Abweichung beträgt rund 0,6 kg.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Abweichung, wobei –0,6 ebenfalls richtig ist.

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Wachstum von Tierpopulationen

a1) $N(0) = 100$
$N(t_v) = 2 \cdot N(0)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_v = 4{,}9...$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von t_v.

b1) $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$
$f(0) = 15,\ f(35) = 0,\ f'(7) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = -\frac{1}{49} \cdot t^2 + \frac{2}{7} \cdot t + 15$

b2) Der Ausdruck gibt die Größe der Tierpopulation (Anzahl der Individuen) nach 7 Wochen an.

b3)

$\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1}$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von f.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Fahrradtour

a1) $\int_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 0{,}62...$
Bettina benötigt für die ersten 10 km rund 0,6 h.

a2) $a(t) = v'(t) = -0{,}16 \cdot t$
$v'(1) = -0{,}16$

Die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt $-0{,}16$ km/h².

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeitdauer.
a2) Ein halber Punkt für das richtige Berechnen der Beschleunigung, ein halber Punkt für das Angeben der richtigen Einheit.

b1) $p(x) = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 20{,}0...$
$p(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 60{,}0...$

größtmögliches Intervall: $[20{,}0...; 60{,}0...]$

b2) Der für einen 30 mm breiten Reifen empfohlene Reifendruck ist um rund 2,8 bar geringer als der für einen 20 mm breiten Reifen empfohlene Reifendruck.

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des größtmöglichen Intervalls.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe der zugehörigen Einheiten im gegebenen Sachzusammenhang.

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Biathlon

a1) $b = \frac{2500}{v_1} + \frac{2500}{v_2} + \frac{2500}{v_3} + 2 \cdot t^* + \frac{300}{v_S}$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

b1) Der Ausdruck beschreibt die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall [0; T].

b2)

①	
lokale Maximumstellen	☒

②	
durchschnittlichen Beschleunigung	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

c1) $P(X \geq 4) = 5 \cdot p^4 \cdot (1 - p) + p^5$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Weltbevölkerung

a1) $\sqrt[100]{\frac{2,536}{1,260}} = 1,00701...$

oder:

$\sqrt[100]{2} = 1,00695...$

Prozentsatz: rund 0,70 %

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.

b1) $f(t) = k \cdot t + d$

$k = \frac{6,140 - 3,700}{30} = 0,081\dot{3}$

$d = f(0) = 3,700$

$f(t) = 0,081\dot{3} \cdot t + 3,700$

b2) $f(50) = 7,7\dot{6}$

$\frac{7,7\dot{6} - 7,790}{7,790} = -0,0029...$

Abweichung: rund –0,3 %

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von *f*.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Abweichung in %. Auch die Angabe von 0,3 % ist richtig.

c1) Maximum der Weltbevölkerung: rund 10,1 Milliarden

Kalenderjahr: 2070

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Vitamin C

a1) $20 \cdot 1{,}5 = 30$

30 Portionen weisen 100 mg bis 120 mg Vitamin C pro 100 g auf.

a2) $1 - \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} \cdot \frac{28}{48} = 0{,}7928...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 79,3 %.

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Anzahl.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) 250 ml Orangensaft enthalten nur 87,5 mg Vitamin C und somit weniger als 100 mg.

b2) x ... Menge an Birnensaft in einer Flasche in ml
y ... Menge an Orangensaft in einer Flasche in ml

I: $0{,}2 \cdot x + 0{,}35 \cdot y = 100$
II: $x + y = 350$

$x = 150$
$y = 200$

Es müssen 150 ml Birnensaft mit 200 ml Orangensaft gemischt werden.

b1) Ein Punkt für das richtige Begründen.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Firmenlogos

a1) $f'(x) = \frac{x}{4}$

$f'(4) = 1$

$g'(x) = a \cdot (3 \cdot x^2 - 16)$

$g'(4) = 32 \cdot a$

$32 \cdot a = 1$

$a = \frac{1}{32}$

a2) Die Funktion g ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

oder:

Die Funktion g'' ist linear und hat nur 1 Nullstelle.
(Die Funktion g kann also nur 1 Wendepunkt haben.)

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von a.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) $u = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin(36°) = 17{,}63...$

$u = 17{,}6$ cm

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Umfangs u.

c1) $g(x) = -a \cdot x^2 + 2 \cdot b$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von g.

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Pelletsheizung

a1) $\frac{4{,}84 - 4{,}4}{13} = 0{,}033...$

Die mittlere Änderungsrate der Jahresdurchschnittspreise für Pellets beträgt rund 0,03 Cent/kWh pro Jahr.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der mittleren Änderungsrate.

b1) $K_{Öl}(t) = 15\,000 \cdot 0{,}0795 \cdot t = 1\,192{,}5 \cdot t$

$K_{Pellets}(t) = 15\,000 \cdot 0{,}0484 \cdot t + 10\,000 = 726 \cdot t + 10\,000$

b2) $1\,192{,}5 \cdot t_1 = 726 \cdot t_1 + 10\,000$

$t_1 = 21{,}4...$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Funktionsgleichungen $K_{Öl}$ und $K_{Pellets}$, ein halber Punkt für nur eine richtige Funktionsgleichung.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.

c1) $A''(t) = 0$

$t = 12{,}2...$

Im Jahr 2009 war die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich am größten.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Jahreszahl.

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Beschleunigungstest

a1) $v_1(t) = 25 \cdot t$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von v_1.

b1) $v_2(t_2) = 130$

$t_2 = 6{,}21...\ \text{s}$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von t_2.

c1) $a(80) = 6{,}7$
$a(160) = 1{,}4$
$b = -0{,}13825$ und $c = 15{,}84$

c2) $a(v_3) = 3{,}7$
$v_3 = 118{,}054...$
Aus der Abbildung folgt: $t_3 \approx 5{,}5$ s.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_3.
Toleranzintervall für t_3: [4; 6]

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Würfelspiel

a1) $1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1\,296} = 0{,}0007...$

oder:

$6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{1\,296} = 0{,}0007...$

a2) $p_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0{,}0277...$

$p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} = 0{,}1388...$

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit für ein *Grande*.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der zwei Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2, ein halber Punkt für nur eine richtige Wahrscheinlichkeit.

b1) *E* ... „beim Wurf der fünf Würfel tritt eine (beliebige) Augenzahl genau viermal auf“

b1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang.

c1) P(„Franz bekommt 40 Euro“) = 0,0309 + 0,0386 = 0,0695
P(„Anna bekommt x Euro“) = 1 – P(„Franz bekommt 40 Euro“) = 0,9305
40 · P(„Franz bekommt 40 Euro“) = x · P(„Anna bekommt x Euro“)

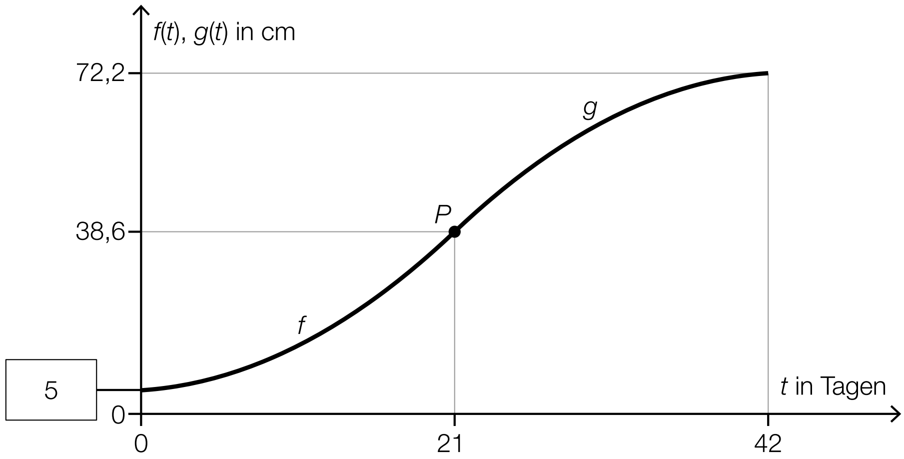
x = 2,987... Euro

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von x.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Sonnenblumen

a1)



a2) $f'(t) = \frac{2}{15} \cdot t + 0{,}2$
$g'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$

I: $g(21) = 38{,}6$
II: $g(42) = 72{,}2$
III: $f'(21) = g'(21)$

oder:

I: $21^2 \cdot a + 21 \cdot b + c = 38{,}6$
II: $42^2 \cdot a + 42 \cdot b + c = 72{,}2$
III: $42 \cdot a + b = 3$

a3) Der Term beschreibt die mittlere Änderungsrate der Höhe dieser Sonnenblume im Zeitintervall [2; 42] in cm/Tag.

oder:

Der Term beschreibt das durchschnittliche Wachstum dieser Sonnenblume im Zeitintervall [2; 42] in cm/Tag.

a1) Ein Punkt für das Eintragen des richtigen Wertes.
a2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems mit drei Gleichungen, ein halber Punkt für nur zwei richtige Gleichungen.
a3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

b1) $38{,}6 = 6{,}2 \cdot a^{17}$

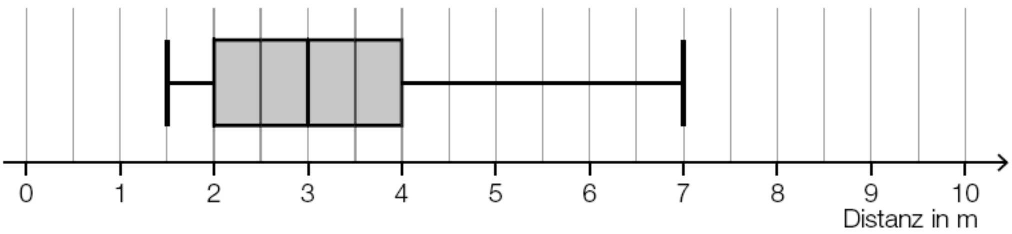
$$a = \sqrt[17]{\frac{38{,}6}{6{,}2}} = 1{,}1135...$$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *a*.

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Schwimmkurs

a1)



a2) Da der Median der geschwommenen Distanzen 12 m beträgt, müssen (bei 17 notierten Distanzen) mindestens 9 Kinder mindestens 12 m geschwommen sein. Daraus folgt, dass höchstens 8 Kinder weniger als 12 m geschwommen sind.

a1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Boxplots.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1)

	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
Kinder, die sofort springen	20	**0,4**
Kinder, die zögerlich springen	**20**	0,4
Kinder, die das Springen verweigern	10	**0,2**

b1) Ein Punkt für das richtige Ergänzen der 3 fehlenden Werte.

c1)

$\frac{12}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{8}{28} \cdot 6$	☒

c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Spezielle Polynomfunktionen vierten Grades

a1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$
$12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b = 0$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

b1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$
$f'(0) = 0$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$
$f''(0) = 2 \cdot b \neq 0$
$P = (0|y_P)$ ist ein Extrempunkt von f.

b2)

①	
b	☒

②	
kleiner als 0	☒

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.
b2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

c1) $e = -2$ bzw. $e = 2$

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln aller möglichen Werte von e.

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Bremsvorgänge

a1) Die Geschwindigkeit nimmt pro Sekunde um 4 m/s ab.

Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt 20 m/s.

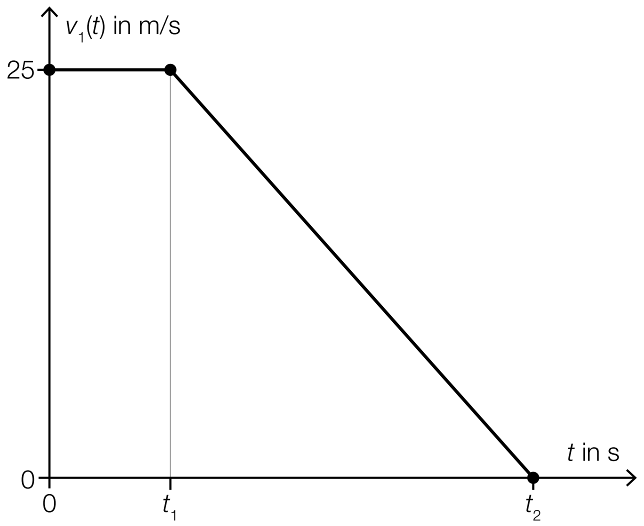
a2) Für eine Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s gilt: $s_B = \frac{5 \cdot 20}{2} = 50$

Bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 m/s beträgt die Zeit bis zum Stillstand 2,5 s.
Es gilt: $k \cdot s_B = \frac{2{,}5 \cdot 10}{2} = 12{,}5$

$k = \frac{1}{4}$

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren beider Koeffizienten im gegebenen Sachzusammenhang, ein halber Punkt für das richtige Interpretieren nur eines Koeffizienten.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von k.

b1)



b2) $s_A = 25 \cdot t_1 + \frac{25}{2} \cdot (t_2 - t_1)$

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Geschwindigkeitsverlaufs, wobei der Übergang zwischen den beiden linearen Funktionen im Punkt $(t_1|25)$ klar erkennbar sein muss.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Koffein

a1) 36 min

a2)

①	
eine Extremstelle	☒

②	
Steigung	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Wertes.
Toleranzintervall: [33 min; 39 min]
a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

b1) $f(T + 10) = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot (T+10)} = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T} \cdot e^{0{,}05 \cdot 10} = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T} \cdot 1{,}648... = f(T) \cdot 1{,}648...$

$\Rightarrow$ Die Behauptung ist richtig.

b2) Die Lösung der Gleichung ist die Temperaturerhöhung, bei der sich die Löslichkeit von Koffein in Wasser jeweils verdoppelt („Verdoppelungstemperatur“).

oder:

Die Lösung der Gleichung ist diejenige Temperatur, bei der die Löslichkeit von Koffein in Wasser doppelt so hoch ist wie bei einer Temperatur von 0 °C.

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Überprüfen. Auch ein Nachweis mit konkreten Zahlen ist als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung)

CO_2 und Klimaschutz

a1) $b = \frac{7{,}9 \cdot 2{,}32 \cdot s}{100 \cdot 500}$

a2) $5 = \frac{x \cdot 2{,}32 \cdot 15\,000}{100 \cdot 500}$

$\Rightarrow \quad x = 7{,}18...$

durchschnittlicher Benzinverbrauch: rund 7,18 Liter pro 100 km

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des durchschnittlichen Benzinverbrauchs.

b1) $\bar{e} = 7{,}8...$ Tonnen pro Person

b2) Das arithmetische Mittel $\bar{x}$ ist größer, weil die für die einzelnen Staaten angegebenen Werte der CO_2-Äquivalente für Staaten mit einer geringeren Einwohnerzahl größer sind als für jene mit einer höheren Einwohnerzahl.

oder:

Wenn man die jeweilige Einwohnerzahl der einzelnen Staaten beim Übergang vom ungewichteten zum gewichteten arithmetischen Mittel berücksichtigt, erhöht sich das Gewicht jedes Staates mit einem Wert der CO_2-Äquivalente kleiner als $\bar{x}$ und verringert sich das Gewicht jedes Staates mit einem Wert der CO_2-Äquivalente größer als $\bar{x}$.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen.
b2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm

a1) $d = 36 + \int_6^{t_1} v_2(t)\,\mathrm{d}t$

oder:

$d = 36 + 12 \cdot (t_1 - 6)$

a2) $36 + 12 \cdot 4 - \int_0^{10} 0{,}12 \cdot t^2\,\mathrm{d}t = 44$
Die Strecke ist um 44 m länger.

a1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen.

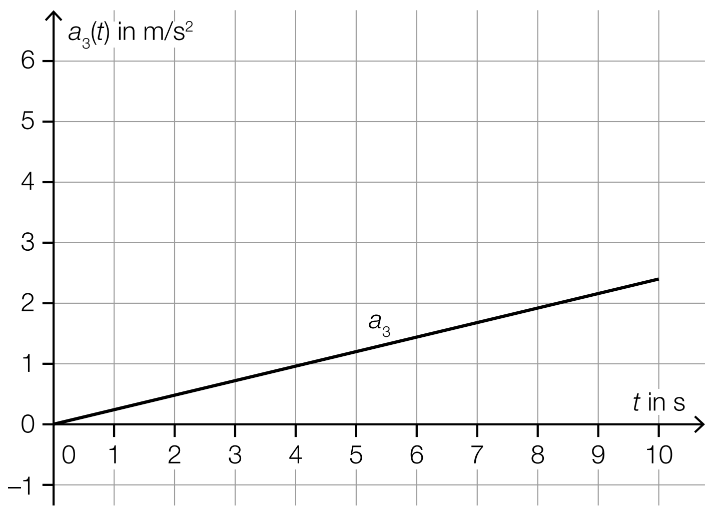
b1) I: $v_1(6) = 12$
II: $v_1'(0) = 0$
III: $v_1''(3) = 0$

oder:

I: $216 \cdot p + 36 \cdot q + 6 \cdot r = 12$
II: $r = 0$
III: $18 \cdot p + 2 \cdot q = 0$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems mit drei Gleichungen, ein halber Punkt für nur zwei richtige Gleichungen.

c1)



c1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen.

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Würfelspiel

a1) Kombinationen der Augenzahlen: „2 und 6“ oder „3 und 5“ oder „4 und 4“

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18} = 0{,}2\dot{7}$$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) $E(X_C) = 5$

b2) $\sigma(X_A) = \sigma(X_B) = 1{,}067...$

b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Erwartungswerts.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung.

c1) $\mu_n = n \cdot \frac{1}{3}$

$\sigma_n = \sqrt{n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}$

c1) Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Maturaball

a1) I: $20 \cdot x + 22 \cdot y = 13\,240$
II: $x + y = 640$

a1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems mit zwei Gleichungen, ein halber Punkt für nur eine richtige Gleichung.

b1) X ... Anzahl der Gewinne
X ist binomialverteilt mit $n = 3$, $p = 0{,}25$.
$P(X = 2) = 3 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75 = 0{,}140625$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

c1) $P\left(X = \boxed{1}\right) = \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49}$

c2) Martins Behauptung ist falsch, weil die Wahrscheinlichkeit, dass eine markierte Badeente ausgewählt wird, nicht konstant bleibt.

oder:

Martins Behauptung ist falsch, weil es sich beim gegebenen Sachzusammenhang um ein Ziehen ohne Zurücklegen handelt.

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
c2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Temperaturveränderungen

a1) $37 = 70 \cdot e^{-0{,}045 \cdot t^*} + 18$
$t^* = 28{,}9...$ min

a2) $\frac{g(12) - g(10)}{12 - 10} = -1{,}92...$
Die Temperatur des Tees sinkt im Intervall [10 min; 12 min] durchschnittlich um rund 1,9 °C/min.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von t^*.
a2) Ein halber Punkt für das richtige Berechnen der mittleren Änderungsrate, ein halber Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

b1) $T_{t+1} = T_t + 0{,}08 \cdot (25 - T_t)$

b2) $T_1 = 5 + 0{,}08 \cdot (25 - 5) = 6{,}6$
$T_2 = 6{,}6 + 0{,}08 \cdot (25 - 6{,}6) = 8{,}072$
$T_3 = 8{,}072 + 0{,}08 \cdot (25 - 8{,}072) = 9{,}42624$
$T_3 = 9{,}4...$ °C

b1) Ein Punkt für das richtige Ergänzen der Differenzengleichung.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Temperatur zum Zeitpunkt $t = 3$ min.

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Satelliten und ihre Umlaufbahnen

a1) $7\,500 = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{r}}$

$r = 7\,079\,093{,}3...$ m

a2) $2 \cdot r \cdot \pi = 7\,500 \cdot t$

$t = 5\,930{,}5...$ s

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von r.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Zeit.

b1) $\cos(81{,}32°) = \frac{6{,}37 \cdot 10^6}{r}$

$r = 42\,208\,977{,}5...$ m

b2) Entfernung Forschungsstation – Satellit: $\sqrt{r^2 - R^2} = 41\,725\,542{,}4...$ m

$\frac{41\,725\,542{,}4...}{300\,000\,000} = 0{,}1390...$

Das Funksignal benötigt für seinen Weg von der Forschungsstation zum Satelliten rund 0,139 s.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von r.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Zeit auf 3 Nachkommastellen.

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Speichermedien

a1) $N(F) = \frac{16 \cdot 1\,024 \cdot 1\,024}{F} = \frac{16\,777\,216}{F}$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von N, wobei auch jeder Hinweis auf das Abrunden von $N(F)$ auf die nächstkleinere ganze Zahl als richtig zu werten ist.

b1) $0{,}75 + 0{,}25 \cdot 0{,}75^3 = 0{,}855\ldots$

b2) $0{,}75^3 + 3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}843\ldots$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

c1) $P(0) = 20{,}1 \quad \Rightarrow \quad a + 11 = 20{,}1$
$P(9) = 11{,}1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot b^9 + 11 = 11{,}1$
$a = 9{,}1$
$b = \sqrt[9]{\frac{0{,}1}{9{,}1}} = 0{,}60579\ldots$

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Krankenstände

a1) $K(t) = -0{,}18 \cdot t + 12{,}6$

a2) Die durchschnittliche Dauer der Krankenstände hat im Zeitraum von 2000 bis 2015 um rund 21,4 % abgenommen.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion K.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) E ... „mindestens 1 der beiden Angestellten erkrankt in einem Winter"

b2) X ... Anzahl der Winter mit Erkrankungen des Angestellten A
X ist binomialverteilt mit $n = 5$, $p = 0{,}2$.

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}8^5 + 5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}73728$

b1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben von E im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Hurrikans – tropische Wirbelstürme

a1) S_i ... Schadenspotenzial bei der Hurrikan-Kategorie i
$S_2 = S_1 + 9, \; S_3 = S_2 + 40$
Die absolute Änderung des Schadenspotenzials für zwei aufeinanderfolgende Kategorien ist nicht konstant.
Der Zusammenhang zwischen der Hurrikan-Kategorie und dem Schadenspotenzial ist nicht linear.

$S_2 = S_1 \cdot 10, \; S_3 = S_2 \cdot 5$
Die relative Änderung des Schadenspotenzials für zwei aufeinanderfolgende Kategorien ist nicht konstant.
Der Zusammenhang zwischen der Hurrikan-Kategorie und dem Schadenspotenzial ist nicht exponentiell.

a1) Ein Punkt für das richtige Nachweisen bei beiden Zusammenhängen, ein halber Punkt bei nur einem richtig nachgewiesenen Zusammenhang.

b1) $h = \frac{110}{45 \cdot \bar{x}}$

b2) Näherungswert für $\bar{x}$: $\frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 20 + 7 \cdot 14 + 10 \cdot 7 + 13 \cdot 1 + 16 \cdot 1}{45} = 6{,}2$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Näherungswerts für $\bar{x}$.

c1) $v = 1{,}852 \cdot v_k$

oder:

$v_k = 0{,}539... \cdot v$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Auslastung von Flügen

a1) $n = \frac{477}{0{,}9} = 530$

$m = \frac{530}{1{,}06} = 500$

a2) X ... Anzahl der Personen, die ihr Ticket in Anspruch nehmen
Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 530$ und $p = 0{,}9$.

$P(X \geq 501) = 0{,}00012...$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von n und m.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) $V'(d) = 0$
$d = 3\,507{,}5...$ km
$(V''(3\,507{,}5...) > 0)$

b2) $V(3\,507{,}5...) = 3{,}67...$
$3{,}67... \cdot 271 \cdot 35{,}0... = 34\,934{,}1...$

Die benötigte Menge an Treibstoff beträgt rund 34 934 L.

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Flugdistanz d.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Menge an Treibstoff.

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Atemstromstärke

a1) $t_1 = \frac{6 \cdot \pi}{5} = 3{,}76...$
$t_1 = 3{,}76...\text{ s}$

a2) $t_2 = \frac{8 \cdot \pi}{5} = 5{,}02...$
$t_2 = 5{,}02...\text{ s}$

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_2.

b1) 2,5 s nach Beginn der Einatmungsphase befinden sich rund 4,29 Liter Luft in der Lunge von Mathias.

b2) $V(t) = -0{,}4 \cdot \cos(1{,}25 \cdot t) + 0{,}4$

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das Ergänzen der beiden richtigen Zahlen, ein halber Punkt für nur eine richtige Zahl.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Tee

a) **Lösungserwartung:**

a1) Exponentialfunktion

a2) $33 \cdot 1{,}02^{10} \cdot 0{,}95 = 38{,}21...$
In Österreich werden im Jahr 2026 pro Kopf ca. 38,2 L Tee mittels Teebeuteln zubereitet.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für die Angabe des richtigen Funktionstyps.
Grundkompetenzpunkt: FA 1.9
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „L“ nicht angegeben sein muss.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $g(0) = 1{,}55$, $g(6) = 2{,}55$
$g(t) = \frac{1}{6} \cdot t + 1{,}55$

b2) Jahr: 2013
Betrag der absoluten Abweichung: $0{,}0\dot{3}$ Millionen Tonnen

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Jahres und der richtigen Lösung.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:

$65 = 70 \cdot e^{-k \cdot 10} + 20$

$k = \frac{\ln\left(\frac{45}{70}\right)}{-10} = 0{,}0441...$

$k \approx 0{,}044\ \text{min}^{-1}$

c2) mögliche Vorgehensweise:

$45 = (90 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$

$35 = (70 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$

$\Rightarrow \quad \frac{45 - T_U}{90 - T_U} = \frac{35 - T_U}{70 - T_U}$

$\Rightarrow \quad T_U = 0\ °\text{C}$

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „min^{-1}“ nicht angegeben sein muss.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 26 (Teil 2)

Erderwärmung

a) Lösungserwartung:

a1) $T'(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 41{,}06...$
$(T''(t_0) > 0)$

a2) mögliche Begründung:
Die globale Mitteltemperatur steigt ab t_0 immer schneller an, weil für alle $t > t_0$ der Graph von T linksgekrümmt ist.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei ein Nachweis, dass t_0 eine lokale Minimumstelle ist, nicht erbracht werden muss.
Grundkompetenz: AN 3.3
a2) Ein Punkt für eine richtige Begründung.

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:
$T(200) = 18{,}473... \approx 18{,}47$
$14{,}31 + 1{,}5 \leq 18{,}47 \leq 14{,}31 + 4{,}5$
Die Funktion T mit $a = 2{,}7$ bestätigt diese Studien.

b2) Zunahme um 1,5 °C: $T(200) = 15{,}81$
Zunahme um 4,5 °C: $T(200) = 18{,}81$
$a_{min} = 2{,}162...$
$a_{max} = 2{,}768...$

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis.
b2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

c) Lösungserwartung:

c1) $k = \frac{15,3 - 14,72}{2100 - 2015} = 0,00682...$

$k \approx 0,0068$ °C/Jahr

c2) $M(t) = 0,0068 \cdot t + 14,72$

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „°C/Jahr" nicht angegeben sein muss.

c2) Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 27 (Teil 2)

Elektromobilität

a) Lösungserwartung:

a1) $a = 1{,}37...$
$b = 2\,168{,}1...$

a2) mögliche Vorgehensweise:

$B_3 = 14\,618 \cdot 1{,}37... + 2\,168{,}1... = 22\,226{,}7...$
$22\,226{,}7... - 18\,459 = 3\,767{,}7...$

Der Bestand an Elektroautos hätte im Jahr 2018 noch um ca. 3768 Elektroautos erhöht werden müssen, damit die angegebene Differenzengleichung auch für das Jahr 2018 zutreffend wäre.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b) Lösungserwartung:

b1) $f(P) = \frac{22}{P}$

b2) Zeitintervall: [5,94... h; 9,56... h]

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Ausgleichspunkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für ein richtiges Intervall, wobei die Einheit „h" nicht angegeben sein muss.

c) Lösungserwartung:

c1) $E(v) = 0{,}2 \cdot v - 1{,}1$

c2) $E(v_1) = 41 - 30{,}22 = 10{,}78 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 59{,}4$ km/h

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „km/h" nicht angegeben sein muss.

Aufgabe 28 (Teil 2)

Müsliriegel

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Vorgehensweise:

$G(x)$ ... Gewinn bei einer Produktion von x Müsliriegeln
$G(100\,000) = p \cdot 100\,000 - 100\,000 - (9\,000 \cdot 2 + 900 \cdot 5 + 100 \cdot 65)$
$G(100\,000) = 80\,000 \quad \Rightarrow \quad p = € \; 2{,}09$

a2) $p_1 \cdot 100\,000 - 100\,000 = 80\,000 \quad \Rightarrow \quad p_1 = € \; 1{,}80$
$\frac{0{,}29}{2{,}09} = 0{,}1387... \approx 13{,}9\ \%$

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€" nicht angegeben sein muss.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

b1) $E(X) = 0{,}09 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot 5 + 0{,}001 \cdot 65$
$E(X) = € \; 0{,}29$

b2) mögliche Vorgehensweise:
$1 - \frac{90\,000}{100\,000} \cdot \frac{89\,999}{99\,999} \cdot \frac{89\,998}{99\,998} \cdot \frac{89\,997}{99\,997} = 0{,}3439...$

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€" nicht angegeben sein muss.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die näherungsweise Berechnung mit $1 - 0{,}9^4$ ebenfalls als richtig zu werten ist.

c) Lösungserwartung:

c1) $\sigma(Y) = \sqrt{1\,000 \cdot 0{,}95 \cdot (1 - 0{,}95)} = 6{,}892...$

c2) mögliche Interpretation:
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 933 Müsliriegel die vorgegebene Mindestmasse haben, beträgt ca. 99 %.

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
c2) Ein Punkt für eine richtige Interpretation.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Solarthermie-Anlagen

a) Lösungserwartung:

a1) $s = 2 \cdot l \cdot \sin\left(\frac{90° - \varepsilon}{2}\right)$

a2) $2 \cdot 1\,666 \cdot \sin\left(\frac{90° - 14°}{2}\right) = 2\,051{,}3... \approx 2\,051$

maximaler Wert von s: ca. 2 051 mm

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b) Lösungserwartung:

b1) Mit $P(11{,}5) = 0$ erhält man den Parameter $a = \frac{20}{23}$.

b2) $\int_0^{11{,}5} P(t)\,\mathrm{d}t = 59{,}9... \approx 60$
Die an diesem Tag von der Solarthermie-Anlage verrichtete Arbeit beträgt ca. 60 kWh.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „kWh“ nicht angegeben sein muss.

Aufgabe 26 (Teil 2)

Benzinverbrauch

a) Lösungserwartung:

a1) $\frac{B(90) - B(70)}{B(70)} = 0{,}2138... \approx 21{,}4\ \%$

a2) $B(v_1) \cdot 0{,}75 = B(40)$
$v_1 = 24{,}24...$ km/h

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:
$f(100) = B(100) = 4{,}40...$
$f(130) = B(130) = 6{,}60...$
$f(v) = 0{,}0734... \cdot v - 2{,}9399...$

b2) mögliche Vorgehensweise:
$D(v) = B(v) - f(v)$
$D(v) = 0{,}3$
$(v_1 = -10{,}94...)$
$v_2 = 87{,}08...$
$v_3 = 143{,}34...$

Da die Funktion D an der Stelle $v = 114{,}91...$ km/h eine Minimumstelle mit dem Funktionswert $-0{,}1 > -0{,}3$ hat, erhält man das Intervall [87,1 km/h; 143,3 km/h].

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Ausgleichspunkt für einen richtigen Funktionsterm. Äquivalente Funktionsterme sind als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für das richtige Intervall, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

c) Lösungserwartung:

c1) $v_{min} = 55{,}73...$ km/h
$B_{min} = 3{,}03...$ L/100 km

c2) $g(v) = B_{min} + 2$
$v_1 = 20{,}41...$ km/h
$v_2 = 108{,}67...$ km/h

Bei Geschwindigkeiten von ca. 20,4 km/h und ca. 108,7 km/h ist der Benzinverbrauch bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck um 2 L/100 km höher als B_{min}.

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die beiden richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für die beiden richtigen Geschwindigkeiten, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

Aufgabe 27 (Teil 2)

Bevölkerungswachstum in Afrika

a) Lösungserwartung:

a1) m = 19 Jahre

a2) Aufgrund der Annahme, dass in jeder Altersklasse die einzelnen Lebensalter gleich häufig auftreten, sind 4,16 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Männer im Alter von 15 bis 18 Jahren und 4,08 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Frauen im Alter von 15 bis 18 Jahren.
$7{,}7\ \% + 7{,}5\ \% + 6{,}9\ \% + 6{,}7\ \% + 6{,}0\ \% + 5{,}8\ \% + 4{,}16\ \% + 4{,}08\ \% = 48{,}84\ \%$
$1{,}3 \cdot 10^9 \cdot 0{,}4884 = 6{,}3492 \cdot 10^8 \approx 635$ Millionen Menschen

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b) Lösungserwartung:

b1) Tansania

b2) Niger

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Ausgleichspunkt für die Angabe des richtigen Landes.
b2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Landes.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Begründungen:

Die (mittleren) jährlichen Wachstumsraten sind im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd konstant:
1980 bis 1990: ca. 2,6 %
1990 bis 2000: ca. 2,5 %
2000 bis 2010: ca. 2,6 %

oder:

Die prozentuellen Wachstumsraten sind in den 10-Jahres-Zeiträumen von 1980 bis 2010 annähernd konstant:
1980 bis 1990: ca. 30 %
1990 bis 2000: ca. 28 %
2000 bis 2010: ca. 30 %

oder:

Die gegebenen Daten können gut mit einer Exponentialfunktion N mit der Gleichung $N(t) = N_0 \cdot 1{,}026^t$ beschrieben werden. Die Funktionswerte weichen nur geringfügig von den Tabellenwerten ab.

c2) $360 = 122{,}4 \cdot 1{,}0262...^t \quad \Rightarrow \quad t = 41{,}6... \approx 42$

Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2042 die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen.

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für eine richtige Begründung.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch das Kalenderjahr 2041 als richtig zu werten ist.

d) Lösungserwartung:

d1) $k = \frac{62{,}4 - 37{,}5}{65} = 0{,}3830... \quad \Rightarrow \quad k \approx 0{,}383$ Lebensjahre pro Kalenderjahr

d2) $62{,}4 + t \cdot 0{,}3830... = 78{,}5$
$t = 42{,}028... \approx 42{,}03$

Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2060 in Afrika die durchschnittliche Lebenserwartung den Wert 78,5 Jahre erreichen.

Lösungsschlüssel:

d1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Lebensjahre pro Kalenderjahr" nicht angegeben sein muss.
d2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Kalenderjahrs, wobei auch die Kalenderjahre 2058, 2059 und 2061 als richtig zu werten sind.

Aufgabe 28 (Teil 2)

Sicherheitskontrolle

a) Lösungserwartung:

a1)

d	15	30	330
$P(X = d)$	0,9	$0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06$	$0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}04$

a2) $E(X) = 15 \cdot 0{,}9 + 30 \cdot 0{,}06 + 330 \cdot 0{,}04 = 28{,}5$

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für die Ergänzung der richtigen Werte in der Tabelle.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b) Lösungserwartung:

b1) $p^2 = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}31622... \approx 0{,}3162$

b2) Y ... Anzahl der Personen, die einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen
Y ist binomialverteilt mit $n = 10$, $p = 0{,}31622...$
$P(Y \geq 5) = 0{,}1794... \approx 0{,}179$

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Grundkompetenz: WS 2.3
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

c1) $A(0) = 0,\ A(45) = 15,\ A'(45) = 0$
$a = -\frac{1}{135},\ b = \frac{2}{3},\ c = 0$

c2) $\int_0^{90} A(t)\,\mathrm{d}t = 900$

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die Angabe der drei richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Fallschirmsprung

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Deutungen:

Im Zeitintervall [5; 10] nimmt die Fallgeschwindigkeit (in m/s) des Fallschirmspringers pro Sekunde durchschnittlich um w zu.

oder:

Die mittlere Beschleunigung des Fallschirmspringers im Zeitintervall [5; 10] beträgt w (in m/s²).

a2) mögliche Deutung:

Zum Zeitpunkt t_1 ist die Momentanbeschleunigung genauso hoch wie die mittlere Beschleunigung im Zeitintervall [5; 10].

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für eine richtige Deutung.
Grundkompetenz: AN 1.3
a2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

b) Lösungserwartung:

b1) $4\,000 - \int_0^{30} v_1(t)\,\mathrm{d}t = 2\,543{,}8... \approx 2\,544$

Der Fallschirm wird in einer Höhe von ca. 2 544 m geöffnet.

b2) $\int_{30}^{x} v_2(t)\,\mathrm{d}t = 2\,543{,}8...$

$x = 531{,}7... \approx 532$

Die Zeitdauer des gesamten Fallschirmsprungs beträgt ca. 532 s.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s“ nicht angegeben sein muss.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:

$9{,}81 \cdot 9 - v_1(9) = 38{,}192... \approx 38{,}19$

$v_1(9)$ ist um ca. 38,19 m/s kleiner als v^*.

c2) mögliche Vorgehensweise:

$\frac{9{,}81 - v_1'(9)}{9{,}81} = 0{,}84958... \approx 0{,}8496$

Die Beschleunigung unter Berücksichtigung des Luftwiderstands ist um ca. 84,96 % geringer als jene ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands.

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angegeben sein muss.

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 26 (Teil 2)

Wachstumsprozesse

a) Lösungserwartung:

a1) $N_{t+1} - N_t = 0{,}05 \cdot (2\,000 - N_t)$ mit $N_0 = 0$

a2) mögliche Vorgehensweise:

$N_{t+1} = N_t + 0{,}05 \cdot (2\,000 - N_t) = 0{,}95 \cdot N_t + 100$

$\Rightarrow$ Für $N_0 = 0$ ist $N_6 > 500$.

Nach 6 Tagen sind erstmals mehr als 25 % der Passagiere erkrankt.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für eine richtige Differenzengleichung, wobei „$N_0 = 0$" nicht angegeben sein muss. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [5; 6]

b) Lösungserwartung:

b1) $N_{t+1} = (1 - r) \cdot N_t + r \cdot S \quad \Rightarrow \quad a = 1 - r$ und $b = r \cdot S$

$r = 1 - a$

$S = \frac{b}{r} = \frac{b}{1 - a}$

b2) mögliche Vorgehensweise:

I: $9{,}8 = 5 \cdot a + b$

II: $14{,}41 = 9{,}8 \cdot a + b$

$a = 0{,}960... \approx 0{,}96$ und $b = 4{,}997... \approx 5{,}00$

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die beiden richtigen Lösungen. Andere Schreibweisen der Lösungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

c) Lösungserwartung:

c1) $15\,000 = 1\,000\,000 \cdot (1 - e^{-k \cdot 1}) \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}01511... \quad \Rightarrow \quad k \approx 0{,}0151$ pro Woche

c2) $500\,000 = 1\,000\,000 \cdot (1 - e^{-k \cdot t_0}) \quad \Rightarrow \quad t_0 = 45{,}8... \quad \Rightarrow \quad t_0 \approx 46$ Wochen

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „pro Woche“ nicht angegeben sein muss.
Grundkompetenz: FA 1.7

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Woche“ nicht angegeben sein muss.
(Die Lösung kann je nach Rundung von k von der angegebenen Lösung abweichen.)

Aufgabe 27 (Teil 2)

Quiz mit Spielbrett

a) Lösungserwartung:

a1) $P(A) = p^2 + 2 \cdot p^3 \cdot (1 - p)$

a2) mögliche Vorgehensweise:

$f(p) = p^2 + 2 \cdot p^3 \cdot (1 - p)$
$f'(p) = 2 \cdot p + 6 \cdot p^2 - 8 \cdot p^3$
$f''(p) = 2 + 12 \cdot p - 24 \cdot p^2$
$f''(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 0{,}6318... \approx 0{,}632 \quad (p_2 = -0{,}1318...)$
$(f'''(0{,}6318...) \neq 0)$

Bei $p \approx 0{,}632$ wächst die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ am stärksten.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

b1) $E(Y) = 100 \cdot 0{,}8 - 100 \cdot 0{,}2 = 60$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$E(Z) = 60$
$\sigma = 8$
Es gilt: $P(E(Z) - 2 \cdot \sigma \leq Z \leq E(Z) + 2 \cdot \sigma) \approx 0{,}954 \quad \Rightarrow \quad z_1 \approx 44, z_2 \approx 76 \quad \Rightarrow \quad [44; 76]$

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
b2) Ein Punkt für ein richtiges Intervall, wobei die Angabe der beiden richtigen Werte ohne Intervallschreibweise als richtig zu werten ist.
Toleranzintervall für z_1: [44; 45]
Toleranzintervall für z_2: [75; 76]

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Interpretation:

$M(n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass Maria genau die Hälfte der Fragen richtig beantwortet.

oder:

$M(n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Spielfigur nach n Fragen auf dem Feld mit der Zahl 0 steht.

c2) $\tilde{M}(n^*) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}}$

$\sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n^*}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}} \quad \Rightarrow \quad n^* = 4 \cdot n$

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Ausgleichspunkt für eine richtige Interpretation.
Grundkompetenz: WS 3.1

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 28 (Teil 2)

Ozonmessungen

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Vorgehensweise:

$v(t) = 0{,}125 \cdot t$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Wetterballons in m/s zum Zeitpunkt t

$v(t_1) = 6 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{6}{0{,}125} = 48$

$\int_0^{48} v(t)\,\mathrm{d}t = 144$

Die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1 beträgt 144 m.

a2) mögliche Vorgehensweise:

verbleibende senkrechte Strecke bis zum Start der Messung:
$2\,000 - 220 - 144 = 1\,636$

$\frac{1\,636}{6} + 48 = 320{,}\dot{6}$

Das Messgerät beginnt seine Aufzeichnungen ca. 321 s nach dem Start.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s“ nicht angegeben sein muss.

b) Lösungserwartung:

b1) $V(h) = \dfrac{6{,}3}{\left(1 - \dfrac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}}$ mit h in m, $V(h)$ in m³

b2) mögliche Vorgehensweise:

$V(27\,873{,}6) = 1\,150{,}351...$

$\dfrac{4 \cdot \left(\dfrac{d}{2}\right)^3 \cdot \pi}{3} = 1\,150{,}351... \quad \Rightarrow \quad d = 13{,}0... \approx 13$

Der Durchmesser des Wetterballons, bei dem dieser zerplatzt, beträgt ca. 13 m.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:

$f(h) = a \cdot h^2 + b \cdot h + c$
$f(37) = 1$
$f(22) = 36$
$f'(22) = 0$
$f(h) = -\dfrac{7}{45} \cdot h^2 + \dfrac{308}{45} \cdot h - \dfrac{1\,768}{45}$

c2) $\int_7^{37} f(h)\,\mathrm{d}h = 730$

$730 \cdot 0{,}01 = 7{,}3$

Dicke dieser Schicht: 7,3 mm

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Einsatz von Antibiotika

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Vorgehensweise:

$B'(t) = b \cdot (k - c \cdot t) \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2}$

$B'(t_1) = 0$

$k - c \cdot t_1 = 0$

$t_1 = \frac{k}{c}$

a2) mögliche Beschreibung:

Die Extremstelle t_1 wird zu einem früheren Zeitpunkt erreicht.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:

$20 = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$

$1 = e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$

$0 = 2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 4{,}\dot{4}\text{ h}$

b2) mögliche Deutung:

$B_1'(t_2)$ gibt die (momentane) Abnahmegeschwindigkeit in Bakterien pro Stunde zum Zeitpunkt t_2 an.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h" nicht angeführt sein muss.

Toleranzintervall: [4,4 h; 4,5 h]

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:

$B_2''(t) = 5 \cdot (t^2 - 8 \cdot t + 15) \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$

$t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3;\ t_2 = 5$

Es gilt:

$B_2'(3) > 0$

und

$B_2'(5) < 0$

(und $B_2'''(5) \neq 0$)

Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ findet die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation statt.

c2) $\frac{B_2(5)}{B_2(4)} = 0{,}60653... \approx 0{,}6065$

Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ sind noch ca. 60,65 % der maximalen Anzahl an Bakterien vorhanden.

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h“ nicht angeführt sein muss. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,60; 0,61]

Aufgabe 26 (Teil 2)

Tennis

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = 0$
$-0{,}0021 \cdot x^2 + 0{,}01 \cdot x + 0{,}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 12{,}42\ldots \quad (x_2 = -7{,}66\ldots)$
waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ca. 12,4 m

a2) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 21{,}597\ldots \quad (x_2 = -2{,}15\ldots,\ x_3 = -12{,}30\ldots)$
Die einzige positive Nullstelle von f ist $x_1 \approx 21{,}6$.

Da das Spielfeld 23,77 m lang ist, landet der Tennisball im gegnerischen Spielfeld.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [12,4 m; 12,5 m]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
a2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

b) Lösungserwartung:

b1) $\Delta v = r \cdot v_1 + v_1$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$\Delta v = v_1 \cdot (1 + r) = 4{,}4 \cdot (1 + 0{,}6) = 7{,}04$
$a = 7{,}04 : 0{,}01 = 704$
$a = 704\ \mathrm{m/s^2}$

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für a: [700 m/s²; 710 m/s²]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) Lösungserwartung:

c1) $0{,}6302 - 0{,}3698 = 0{,}2604$
Diese Wahrscheinlichkeit ist um ca. 26 Prozentpunkte höher.

c2) Wahrscheinlichkeit, dass Spieler *A* ein Fünf-Satz-Match gegen Spieler *C* gewinnt: 0,9512
Wahrscheinlichkeit, dass Spieler *A* ein Fünf-Satz-Match gegen Spieler *B* gewinnt: 0,6302
$\frac{0{,}9512}{0{,}6302} = 1{,}50936... \approx 1{,}5094$
$\Rightarrow$ 0,9512 ist um ca. 50,94 Prozent höher als 0,6302.

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [26; 26,1]

c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 27 (Teil 2)

Aufzugsfahrt

a) Lösungserwartung:

a1) Aufzug bremst ab: [17 s; 20 s]

Aufzug fährt mit konstanter Geschwindigkeit: [3,5 s; 17 s]

a2) Kim hat nicht recht, da die Beschleunigung in diesem Zeitintervall konstant und positiv ist und somit die Geschwindigkeit gleichmäßig (linear) zunimmt.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden richtigen Zeitintervalle.
Abweichungen von bis zu ±0,3 s bei den Intervallgrenzen sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b) Lösungserwartung:

b1) $\frac{3{,}5 + 0{,}5}{2} \cdot 0{,}6 = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad v_{max} \approx 1{,}2$ m/s

b2) Die Inhalte der beiden Flächenstücke müssen gleich groß sein, da die Geschwindigkeitszunahme während der Beschleunigungsphase gleich groß wie die Geschwindigkeitsabnahme während des Abbremsvorgangs sein muss.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [1 m/s; 1,4 m/s]
b2) Ein Punkt für eine richtige Begründung.

c) Lösungserwartung:

c1) $\int_0^1 0{,}6 \cdot t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 0{,}6\,\mathrm{d}t + \int_2^3 0{,}6 \cdot (t - 3)^2 \cdot (2 \cdot t - 3)\,\mathrm{d}t = 1{,}2$

Im Zeitintervall [0; 3] beträgt die Geschwindigkeitszunahme 1,2 m/s.

c2) mögliche Vorgehensweise:

$a_1'(t) = 0$ für alle $t \in [1; 2) \quad \Rightarrow \quad a_1'(1) = 0$

Zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt die momentane Änderungsrate der Beschleunigung 0 m/s³.

Die angeführten Bedingungen sind bei $t = 1$ eingehalten.

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [1,1; 1,3]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

Aufgabe 28 (Teil 2)

E-Book

a) Lösungserwartung:

a1) Umsatz pro Nutzer 2015: rund € 49,86
Umsatz pro Nutzer 2020: rund € 95,49

absolute Änderung: € 45,63
relative Änderung: 0,9155

a2) Differenzenquotient für das Intervall [2015; 2020]: rund € 9,13 pro Jahr

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte. Andere Schreibweisen der Lösungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für die absolute Änderung: [44; 47]
Toleranzintervall für die relative Änderung: [0,88; 0,95]

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [8,90; 9,40]

b) Lösungserwartung:

b1) $U(2017) = U(2015) \cdot 1{,}2^2$
$U(2017) = 502{,}56$ Millionen Euro

b2) $a = \frac{869 - 349}{5} = 104$

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [502 Millionen Euro; 503 Millionen Euro]

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:

$8{,}58 \cdot \frac{7}{82{,}18} = 0{,}7308347\ldots \approx 0{,}730835$

Anzahl: 730 835 Personen

c2) mögliche Vorgehensweise:

$n = 500;\ p = 0{,}12$

$P(X \geq 50) = 0{,}9287\ldots \approx 0{,}929$

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [720 000; 780 000]

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,90; 0,95]

Aufgabe 25 (Teil 2)

Bremsvorgang

a) Lösungserwartung:

a1) $v_0 = \sqrt{2 \cdot b \cdot s_B}$

a2)

Der Reaktionsweg s_R ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☒
Der Bremsweg s_B ist indirekt proportional zur Bremsverzögerung b.	☒

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Umformungen:
$s_R = v_0 \cdot t_R$
Für v_0 in m/s und $t_R = 1$ Sekunde gilt: $s_R = v_0$
Für v_0 in km/h und $t_R = 1$ Sekunde gilt: $s_R = \frac{v_0}{3,6} = v_0 \cdot 0,278... \approx v_0 \cdot 0,3 = \frac{v_0}{10} \cdot 3$
Daher liefern diese beiden Formeln annähernd die gleichen Ergebnisse.

b2) mögliche Vorgehensweise:
$s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b}$ mit v_0 in m/s $\Rightarrow$ $s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b} \cdot \frac{1}{3,6^2} = \frac{v_0^2}{25,92 \cdot b}$ mit v_0 in km/h,
$\frac{v_0^2}{25,92 \cdot b} = \frac{v_0^2}{100}$ $\Rightarrow$ $b \approx 3,9$ m/s²
Bei der Näherungsformel wird eine Bremsverzögerung von ca. 3,9 m/s² angenommen.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die Angabe geeigneter Umformungen.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s²" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [3,8 m/s²; 4 m/s²]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) Lösungserwartung:

c1) $\dfrac{\frac{v_0^{\,2}}{2 \cdot 6}}{\frac{v_0^{\,2}}{2 \cdot 8}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ Bei nasser Fahrbahn ist der Bremsweg um $\frac{1}{3}$ länger als der Bremsweg bei trockener Fahrbahn.

c2) mögliche Vorgehensweise:

Anhalteweg bei trockener Fahrbahn: $s_A = 20 \cdot 1 + \frac{20^2}{2 \cdot 8} = 45$ m

Mindestwert für den Anhalteweg bei Schneefahrbahn: $s_A = 20 \cdot 1 + \frac{20^2}{2 \cdot 4} = 70$ m

Der Anhalteweg nimmt (bei $v_0 = 20$ m/s und $t_R = 1$ s) bei Schneefahrbahn um mindestens 25 m zu.

Lösungsschlüssel:

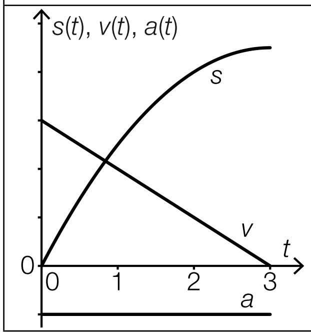
c1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

d) Lösungserwartung:

d1) Das bestimmte Integral $\int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t$ beschreibt den zurückgelegten Weg (in Metern) im Zeitintervall [0; 3].

d2)

	☒

Lösungsschlüssel:

d1) Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation.

d2) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Abbildung angekreuzt ist.

Aufgabe 26 (Teil 2)

Kostenfunktion

a) Lösungserwartung:

a1) $\frac{K(200) - K(100)}{200 - 100} = \frac{66{,}5 - 59{,}35}{100} = 0{,}0715$ GE/ME

a2) mögliche Vorgehensweise:

$K''(x) = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot x - 1{,}5 \cdot 10^{-3}$

$K''(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 312{,}5$ ME

Ab der Produktionsmenge von 312,5 ME steigen die Grenzkosten.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,05 GE/ME; 0,10 GE/ME]
Grundkompetenz: FA 1.4
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [312 ME; 313 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:

$\overline{K}(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 - 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot x + 0{,}2405 + \frac{42}{x}$

$\overline{K}'(x) = 16 \cdot 10^{-7} \cdot x - 7{,}5 \cdot 10^{-4} - \frac{42}{x^2}$

$\overline{K}'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{opt} \approx 554{,}2$ ME

($\overline{K}''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Es liegt ein Minimum vor.)

b2) mögliche Vorgehensweise:

$K(554{,}2) \approx 81{,}1$ GE $\quad \Rightarrow \quad 81{,}1 : 0{,}65 \approx 125$

Dem Hersteller stehen für die Produktion dieses Produkts ca. 125 GE zur Verfügung.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss und eine Überprüfung, dass es sich um ein Minimum handelt, nicht durchgeführt werden muss.
Toleranzintervall: [554 ME; 555 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [120 GE; 130 GE]

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:

$G(x) = E(x) - K(x)$
$G'(x) = p - K'(x)$
$G'(600) = p - K'(600) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}2045$ GE/ME

c2) mögliche Vorgehensweise:

$G(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 335 \quad (x_2 \approx 799, \quad x_3 \approx -196)$
Gewinnbereich: [355 ME; 650 ME]

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,20; 0,21]

c2) Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Gewinnbereichs, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall für x_1: [325; 345]

d) Lösungserwartung:

d1) $a \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}$
$b \approx -9{,}8 \cdot 10^{-3}$
$c \approx 2{,}324$
$d \approx 103$

d2) $K_1(x) = 380 \quad \Rightarrow \quad x \approx 365$ ME

Lösungsschlüssel:

d1) Ein Punkt für die richtigen Werte von a, b, c und d.
Toleranzintervall für a: $[1 \cdot 10^{-5}; 2 \cdot 10^{-5}]$
Toleranzintervall für b: $[-1 \cdot 10^{-2}; -9 \cdot 10^{-3}]$
Toleranzintervall für c: [2; 2,5]
Toleranzintervall für d: [100; 105]

d2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung je nach Rundung der Koeffizienten a, b, c und d variieren kann.

Aufgabe 27 (Teil 2)

Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Vorgehensweise:

$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

n	$f(n)$	$f(n) : f(n-1)$
1	1	–
2	1	1
3	2	2
4	3	1,5
5	5	1,666…
6	8	1,6
7	13	1,625
8	21	1,615…

Für $n = 8$ stimmt das Verhältnis $f(n) : f(n-1)$ erstmals auf zwei Nachkommastellen mit ϕ überein.

a2) mögliche Vorgehensweise:

$n = 3, k = 5 \quad \Rightarrow \quad f(8) = f(2) \cdot f(5) + f(3) \cdot f(6)$

$21 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8$

$21 = 21 \quad$ w. A.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
Grundkompetenz: AN 1.4

a2) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis.

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx 832\,040 \quad \Rightarrow \quad n = 30$$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

Lösen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ und $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ($\approx -0{,}618$)

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für x_2: $[-0{,}62; -0{,}60]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 28 (Teil 2)

Kino

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Beschreibung:

Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Vorstellung eines neuen Films (in allen drei Sälen zusammen) mindestens 350 Sitzplätze belegt sind.

a2) Anzahl der Sitzplätze insgesamt: 355

$$P = \frac{185}{355} \cdot \frac{184}{354} + \frac{94}{355} \cdot \frac{93}{354} + \frac{76}{355} \cdot \frac{75}{354} \approx 0{,}3858 = 38{,}58\ \%$$

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung des Terms im gegebenen Kontext.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:
$n = 628$, $h = \frac{515}{628} \approx 0{,}82$

$$0{,}82 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}82 \cdot 0{,}18}{628}} \approx 0{,}82 \pm 0{,}03 \quad \Rightarrow \quad [0{,}79;\ 0{,}85]$$

b2) mögliche Interpretation:

Eine Erhöhung der Anzahl der Befragten auf das Vierfache führt (bei gleichem relativem Anteil *h*) zu einer Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Ausgleichspunkt für ein richtiges Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,76; 0,80]
Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,83; 0,86]
Grundkompetenz: WS 4.1
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
b2) Ein Punkt für die Angabe der richtigen Auswirkung auf die Breite.

Aufgabe 25 (Teil 2)

Zuverlässigkeit eines Systems

a) Lösungserwartung:

$z_A(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2$

mögliche Vorgehensweise:
$1 - p_{neu}^2 = \frac{1 - 0{,}7^2}{4}$
$p_{neu} = \sqrt{0{,}8725} \approx 0{,}934$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für einen richtigen Term für z_A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,93; 0,94] bzw. [93 %; 94 %]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) Lösungserwartung:

$z_B(p) = 1 - (1 - p)^2$

mögliche Vorgehensweisen:
Der Funktionsterm $1 - (1 - p)^2 = -(p - 1)^2 + 1$ ist dahingehend zu deuten, dass die durch $f(x) = x^2$ beschriebene Grundparabel durch Einsetzen von $x = (p - 1)$ um eine Einheit nach rechts verschoben wird, wegen des Minus vor der Klammer an der horizontalen Achse gespiegelt und durch die Addition von 1 um eine Einheit nach oben geschoben wird.
Damit liegt der Scheitelpunkt bei $(1|1)$ und z_B ist im Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend.

oder:

$z_B'(p) = 2 \cdot (1 - p) > 0$ für alle $p \in (0; 1)$

oder:

$z_B = 1 - (1 - p)^2$
$(1 - p)$ ist für $p \in (0; 1)$ positiv und streng monoton fallend, daher auch $(1 - p)^2$.
Damit ist $1 - (1 - p)^2$ für $p \in (0; 1)$ streng monoton steigend.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für einen richtigen Nachweis. Andere richtige Nachweise (z. B. grafische Nachweise) sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

$$\frac{1 - z_C(0{,}9)}{1 - z_C(0{,}8)} \approx 0{,}254$$

mögliche Interpretation:

Bei Erhöhung der Zuverlässigkeit der Bauteile von 0,8 auf 0,9 sinkt die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems auf etwa ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

mögliche Begründungen:

$z_D(p) = 2 \cdot p^2 \cdot (1 - p^2) + p^4$
$z_D(p) = 2 \cdot p^2 - p^4$

Der Graph der Funktion z_C verläuft für alle $p \in (0; 1)$ oberhalb des Graphen der Funktion z_D.

oder:

Bei allen Kombinationen, bei denen System D funktioniert, funktioniert auch System C. Außerdem funktioniert System C auch dann, wenn nur T_1 und T_4 bzw. nur T_2 und T_3 funktionieren.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für den richtigen Wert des Quotienten und eine richtige Interpretation.
  Toleranzintervall: [0,25; 0,26] bzw. [25 %; 26 %]
– Ein Punkt für eine richtige Begründung.

Aufgabe 26 (Teil 2)

Algenteppich

a) Lösungserwartung:

Die Fläche des Algenteppichs vergrößert sich jede Woche um ca. 75 %.
$A(t) = 4 \cdot 1{,}75^t$

mögliche Vorgehensweise:

$A(6) = (A(5) - 30) \cdot 1{,}75 \approx 62{,}39$
$A(7) = (A(6) - 30) \cdot 1{,}75 \approx 56{,}68$
$A(8) = (A(7) - 30) \cdot 1{,}75 \approx 46{,}69$
$A(9) = (A(8) - 30) \cdot 1{,}75 \approx 29{,}21$

Die geplante Menge kann viermal geerntet werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen (z. B.: $A(t) = 4 \cdot e^{0{,}5596 \cdot t}$) sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) Lösungserwartung:

mögliche Vorgehensweise:

$\frac{37{,}52 - 12{,}25}{2} \approx 12{,}64$

Die durchschnittliche wöchentliche Änderung beträgt in diesem Zeitraum ca. 12,64 m^2/Woche.

mögliche Vorgehensweise:

$w'(A) = k \cdot (800 - A) - k \cdot A$
$800 \cdot k - 2 \cdot k \cdot A_1 = 0$

$A_1 = 400\ m^2$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m^2/Woche“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [12; 13]
  Grundkompetenz: AN 1.3
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) Lösungserwartung:

mögliche Vorgehensweise:

$$65{,}65 = \frac{800}{1 + 199 \cdot e^{-800 \cdot 5 \cdot k}}$$

$k \approx 0{,}00072$ m^{-2}/Woche

mögliche Vorgehensweise:

$$720 = \frac{800}{1 + 199 \cdot e^{-800 \cdot 0{,}00072 \cdot t}}$$

$t \approx 13$

Nach ca. 13 Wochen sind erstmals 90 % der Oberfläche des Teichs mit Algen bedeckt.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m^{-2}/Woche" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [0,0007; 0,0008]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die Angabe des richtigen Zeitpunkts. Auch die Angabe „in der 14. Woche" ist als richtig zu werten.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 27 (Teil 2)

Vornamen in Österreich

a) Lösungserwartung:

mögliche Vorgehensweise:

Zufallsvariable X ... Anzahl der Mädchen mit dem Vornamen *Anna*

Aufgrund der großen Grundgesamtheit kann die Zufallsvariable X als binomialverteilt angenähert werden.

$n = 30$
$p = \frac{2\,144}{40\,777} \approx 0{,}0526$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{2\,144}{40\,777}\right)^{30} \approx 0{,}80217$
(Ergebnis bei Verwendung der hypergeometrischen Verteilung: $\approx 0{,}80229$)

mögliche Vorgehensweise:

$\left(1 - \left(1 - \frac{2\,144}{40\,777}\right)^{30}\right) \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1\,511}{43\,604}\right)^{30}\right) \approx 0{,}52370$
(Ergebnis bei Verwendung der hypergeometrischen Verteilung: $\approx 0{,}52388$)

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,80; 0,81]
  Grundkompetenz: WS 3.2 (oder WS 2.3 bei der Verwendung der hypergeometrischen Verteilung)
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,52; 0,53]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) Lösungserwartung:

mögliche Vorgehensweise:

$f(0) = 0{,}3707 \quad \Rightarrow \quad c = 0{,}3707$
$f(10) = 0{,}2428 \quad \Rightarrow \quad 100 \cdot a + 10 \cdot b + 0{,}3707 = 0{,}2428$
$f(20) = 0{,}2091 \quad \Rightarrow \quad 400 \cdot a + 20 \cdot b + 0{,}3707 = 0{,}2091$
$a = 0{,}000471$
$b = -0{,}0175$
$f(t) = 0{,}000471 \cdot t^2 - 0{,}0175 \cdot t + 0{,}3707$

mögliche Vorgehensweise:

$f(t) < \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 2{,}274 < t < 34{,}88$
also $t > 2{,}274$

Bei dieser Modellierung unterschreitet der relative Anteil der zehn beliebtesten Bubennamen zum ersten Mal im Jahr 1998 ein Drittel.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für a: $[0{,}0004; 0{,}0005]$
  Toleranzintervall für b: $[-0{,}02; -0{,}01]$
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Angabe der Jahreszahl je nach Rundung der Koeffizienten a und b variieren kann.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) Lösungserwartung:

$\mu \approx 370{,}4$
$\sigma \approx 18{,}7$

$$c = \frac{494 - \mu}{\sigma} \approx 6{,}6$$

mögliche Deutung:*

In Oberösterreich weicht die Anzahl der im Jahr 2015 geborenen Mädchen, die den Vornamen *Anna* erhielten, um mehr als 6 Standardabweichungen vom Erwartungswert μ ab. Damit weicht diese Anzahl signifikant von μ ab.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
  Toleranzintervalle: [370; 371] bzw. [18; 19]
- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Deutung.

* *Aktualisiert am 27. Mai 2019.*

Aufgabe 28 (Teil 2)

Wings for Life World Run

a) **Lösungserwartung:**

möglicher Term:

$v \cdot t = 15 \cdot (t - 0{,}5) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{7{,}5}{15 - v}$

mögliche Vorgehensweise:

$s = v \cdot t$

$s = v \cdot \frac{7{,}5}{15 - v}$

$v = 9$ km/h: $s = 11{,}25$ km

$v = 9{,}9$ km/h: $s \approx 14{,}559$ km

$\frac{14{,}559}{11{,}25} \approx 1{,}294$

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. 29,4 %.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [29 %; 30 %]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) **Lösungserwartung:**

mögliche Deutung:

Der Ausdruck beschreibt die Streckenlänge, die die Person bis zum Zeitpunkt $t = b$ zurücklegt.

mögliche Vorgehensweise:

$12 + \int_1^b v(t)\,\mathrm{d}t = 15 + 16 \cdot (b - 1{,}5) \quad \Rightarrow \quad b \approx 1{,}878$

Die Laufzeit der Person bis zum Zeitpunkt des Überholens beträgt ca. 1 h 53 min.
Uhrzeit: 12:53 UTC

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine richtige Deutung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch 12:52 UTC als richtig zu werten ist.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) Lösungserwartung:

Die Behauptung von Leo stimmt.

mögliche Begründung:
Das Catcher-Car legt bis zum Beginn der 20-km/h-Phase 48 km zurück, daher muss der Läufer zumindest 48 km zurückgelegt haben. Das Catcher-Car legt innerhalb der 20-km/h-Phase weitere 40 km zurück, bevor es die 35-km/h-Phase startet. Daher legt der Läufer höchstens 88 km zurück, wenn er in dieser Phase überholt wird. Somit ist es Leo möglich, ein kleineres Intervall anzugeben. (Das kleinstmögliche Intervall beträgt [48 km; 88 km].)

Die Teilnehmerin wurde während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

$t = 3{,}5 + \frac{3{,}72}{20} = 3{,}686 \text{ h}$

$\overline{v} = \frac{51{,}72}{3{,}686} \approx 14{,}03 \text{ km/h}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe, dass die Behauptung von Leo stimmt, und eine richtige Begründung. Die Begründung ist ausreichend, wenn aus ihr klar hervorgeht, dass die Breite des Intervalls durch Vergrößerung der linken Intervallgrenze verringert werden kann, die Angabe eines konkreten Intervalls ist dafür nicht erforderlich.
  Grundkompetenz: FA 1.7
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [13,5; 14,5]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 1

Polynomfunktion dritten Grades

a) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$f_t'(x) = \frac{3}{t} \cdot x^2 - 4 \cdot x + t$

$3 \cdot x^2 - 4 \cdot t \cdot x + t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{t}{3};\, x_2 = t$

Mögliche Beschreibung:

An der Stelle $x = t$ hat f_t eine Nullstelle und ein lokales Minimum.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(x) = \frac{6}{t} \cdot x - 4$

$f_t''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{2}{3} \cdot t$

Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(0) = \frac{6}{t} \cdot 0 - 4 = -4$

Die zweite Ableitungsfunktion hat an der Stelle $x = 0$ den Wert -4 und ist somit unabhängig vom Parameter t.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$A(t) = \int_0^t f_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{t^3}{4} - \frac{2 \cdot t^3}{3} + \frac{t^3}{2} = \frac{t^3}{12}$

Die Funktion A ist eine Funktion dritten Grades.

$A(t) : A(2 \cdot t) = 1 : 8$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm und die Angabe des richtigen Grades von A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für ein richtiges Verhältnis.

d) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$f_{-1}(x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x$

$f_1(-x) = (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + (-x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x \quad \Rightarrow \quad f_{-1}(x) = f_1(-x)$

Mögliche Erläuterung:

Wird der Graph der Funktion f_1 an der senkrechten Achse gespiegelt, so erhält man den Graphen der Funktion f_{-1}.

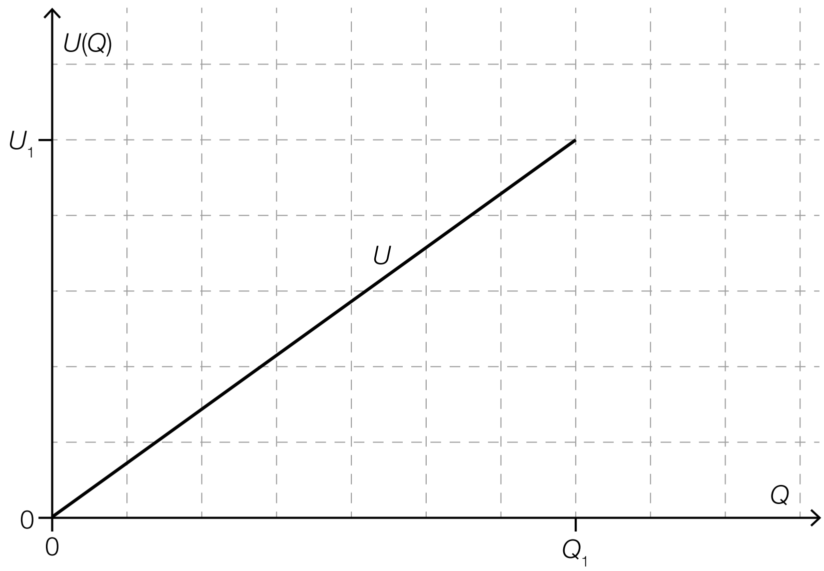
Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.
- Ein Punkt für eine korrekte Erläuterung.

Aufgabe 2

Kondensator

a) Lösungserwartung:



$$W = \int_0^{Q_1} U(Q)\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{2} \cdot U_1 \cdot Q_1 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_1^2$$

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine richtige Skizze.
– Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}99 \cdot U^* = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$0{,}01 = e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ladezeit: $t = -\tau \cdot \ln(0{,}01)$ bzw. $t = \tau \cdot \ln(100)$

Mögliche Vorgehensweise:

$U'(t) = \dfrac{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot U^*}{\tau}$

Es gilt: $U^* > 0,\ \tau > 0,\ e^{-\frac{t}{\tau}} > 0 \quad \Rightarrow \quad U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.
Da $U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, ist U während des Ladevorgangs streng monoton steigend.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen der Lösung sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine richtige Formel und eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Vermögensverteilung

a) **Lösungserwartung:**

Im Jahr 2012 hatten in Österreich ca. 422 500 Personen (laut Abbildung 1: ca. 5 % der Bevölkerung) ein Vermögen von mindestens einer Million Euro.

Mögliche Vorgehensweise:

$6\,086 + \frac{34\,731 - 6\,086}{4} = 13\,247{,}25$

Der Näherungswert für den Schwellenwert bei 25 % liegt bei ca. € 13.247.

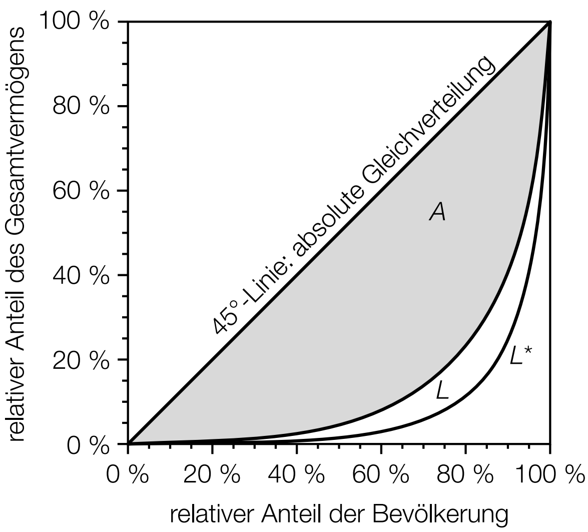
Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei auch die Angabe des richtigen relativen Anteils als richtig zu werten ist.
  Toleranzintervalle: [338 000; 507 000] bzw. [4 %; 6 %]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [€ 13.200; € 13.325]

b) **Lösungserwartung:**

Die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen ca. 60 % des Vermögens.

Möglicher Verlauf von L^*:



Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [58 %; 62 %]
– Ein Punkt für einen richtig eingezeichneten Verlauf einer möglichen Lorenz-Kurve L^*, wobei der Funktionswert an der Stelle 90 % kleiner als 42 % sein muss und die Funktion monoton steigend sein muss.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}5 - \int_0^1 L_1(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}31\dot{3}$

$\frac{0{,}31\dot{3}}{0{,}5} \approx 0{,}63$

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 hatte für das Land S etwa den Wert 0,63.

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 war für das Land S niedriger als jener für Österreich. Das bedeutet, dass in diesem Jahr das Gesamtvermögen im Land S gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war als in Österreich.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,62; 0,63]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für einen korrekten Vergleich und eine (sinngemäß) richtige Deutung.

Aufgabe 4

Wahlhochrechnung

a) Lösungserwartung:

$\frac{1\,648}{3\,172} \approx 0{,}52$

Für Kandidat *A* sind ca. 52 % von 978 Stimmen, also ca. 509 Stimmen, zu erwarten.

relativer Stimmenanteil für Kandidat *A* im 4. Wahlbezirk: $\frac{343}{570} \approx 0{,}6$

Der relative Stimmenanteil weicht im 4. Wahlbezirk um ca. 8 Prozentpunkte von *h* ab.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [500; 510]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [8; 9]

b) $1{,}5462 \cdot 478 - 205{,}71 \approx 533$

Bei der Hochrechnung mithilfe der Regressionsgeraden *g* erhält Kandidat *A* im 5. Wahlbezirk ca. 533 Stimmen bei der Bürgermeisterwahl.

Mögliche Interpretation:

Der Wert der Steigung von *g* gibt an, dass Kandidat *A* pro zusätzlicher Stimme bei der Vergleichswahl ca. 1,55 Stimmen mehr bei der Bürgermeisterwahl erwarten kann.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [530 Stimmen; 540 Stimmen]
– Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.

c) $0{,}52 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}52 \cdot 0{,}48}{3\,172}} \approx 0{,}52 \pm 0{,}017 \Rightarrow \quad [0{,}503;\ 0{,}537]$

Ein symmetrisches 90-%-Konfidenzintervall hat bei gleicher Stichprobengröße sowie gleichem Stichprobenanteil und der Verwendung derselben Berechnungsmethode eine geringere Breite als das symmetrische 95-%-Konfidenzintervall, daher wäre das Ergebnis auch nicht im symmetrischen 90-%-Konfidenzintervall enthalten.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für ein richtiges Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,500; 0,503]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,536; 0,540]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für eine richtige Entscheidung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

Aufgabe 1

Quadratische Funktion

a) Lösungserwartung:

$c > 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt $A = (0|y_A)$ liegt auf der positiven senkrechten Achse, daher ist $y_A = f(0) > 0$.
Da $c = f(0)$ ist, muss $c > 0$ sein.

oder:

Der Parameter c legt fest, in welchem Punkt der Graph von f die senkrechte Achse schneidet. Da dieser Schnittpunkt auf der positiven senkrechten Achse liegt, muss $c > 0$ gelten.

$b < 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt B ist ein Extrempunkt von f. Da B auf der positiven x-Achse liegt, muss seine x-Koordinate x_B positiv sein. Die Extremstelle $x_E = x_B$ der Funktion f ergibt sich aus dem Ansatz:
$f'(x_E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E = -2 \cdot b$.
Wegen $x_E = -2 \cdot b > 0$ muss $b < 0$ gelten.

oder:

Da aus $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b$ folgt, dass $f'(0) = b$ ist, und da f für $(-\infty; x_E)$ mit $x_E > 0$ streng monoton fallend ist, folgt $f'(0) < 0$ und somit gilt: $f'(0) = b < 0$.

oder:

Angenommen, es würde $b \geq 0$ gelten. Wegen $c > 0$ ergibt sich: $\frac{1}{4} \cdot x^2 + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit würde für alle $x > 0$ auch $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$ gelten. Dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass ein Berührpunkt mit der positiven x-Achse existiert. Folglich muss $b < 0$ gelten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe von $c > 0$ und eine korrekte Begründung.
- Ein Punkt für die Angabe von $b < 0$ und eine korrekte Begründung.
  Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

Die Aussage ist wahr.

Mögliche Begründung:

Da $B = (x_B|0)$ ein Extrempunkt von f ist, gilt $f'(x_B) = 0$. Weil auch $f(x_B) = 0$ ist, ist der Punkt B ein Schnittpunkt der Graphen von f und f'.

oder:

An einer Stelle, wo die Funktion f eine Extremstelle hat, weist f' eine Nullstelle auf. Da die Extremstelle von f im gegebenen Fall eine Nullstelle ist, haben f und f' die gleiche Nullstelle und somit im Punkt B einen Schnittpunkt.

Mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b \quad \Rightarrow \quad$ Die Steigung der Ableitungsfunktion f' ist $\frac{1}{2}$.

$f'(x_t) = \frac{1}{2} \cdot x_t + b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_t = 1 - 2 \cdot b$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage wahr ist, und eine korrekte Begründung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

Wenn die Extremstelle von f auch Nullstelle von f ist, hat die Gleichung $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ genau eine Lösung.

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot c}}{0{,}5} \quad \Rightarrow \quad c = b^2$

Mögliche Vorgehensweise:

$f'(x_B) = \frac{1}{2} \cdot x_B + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-x_B}{2}$

Aus $c = b^2$ folgt: $c = \frac{x_B^2}{4}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen b und c. Andere korrekte Zusammenhänge sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die korrekte Angabe der Koeffizienten b und c in Abhängigkeit von x_B.

Aufgabe 2

Überlagerung von Schwingungen

a) Lösungserwartung:

$T = \frac{2 \cdot \pi}{c \cdot \pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{c}$

Mögliche Vorgehensweise:

$T = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1$

$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{1}\int_0^1 \sin^2(2\pi \cdot t)\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad p_{\text{eff}} \approx 0{,}71\ \text{Pa}$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Berechnung des richtigen Effektivwerts des Schalldrucks, wobei die Einheit „Pa" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,7 Pa; 0,71 Pa]

b) Lösungserwartung:

$T = 4$ ms

Frequenz von h: $\frac{1}{0{,}004} = 250$ Hz

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Periodenlänge von h, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [3,9 ms; 4,1 ms]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) Lösungserwartung:

Amplitude von h: ca. 2,9 nach ca. 0,2 ms

Mögliche Begründung:
Die Amplitude von h ist nicht gleich der Summe der Amplituden von h_1, h_2 und h_3, da die drei Funktionen ihre maximalen Funktionswerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreichen.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Amplitude und den richtigen Zeitpunkt, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervalle: [2,85; 2,95] bzw. [0,19 ms; 0,21 ms]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung.

d) Lösungserwartung:

$R_1 = (1 \mid \sqrt{3})$

Mögliche Vorgehensweise:
$x(R_1) = 2 \cdot \cos(60°) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
$y(R_1) = 2 \cdot \sin(60°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Mögliche Vorgehensweise:
Entfernung zwischen L_2 und $R_2 = 2 \cdot x(R_2) = 2 \cdot 2 \cdot \cos(20°) \approx 3{,}76$ m

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von R_1.
  Toleranzintervall für die y-Koordinate: [1,7; 1,75]
- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Lösung.
  Toleranzintervall: [3,7 m; 3,8 m]

Aufgabe 3

Lachsbestand

a) **Lösungserwartung:**

$n_0 \approx 547$

Mögliche Interpretation:

Im gegebenen Kontext gibt n_0 denjenigen Lachsbestand an, bei dem die Anzahl der Lachse der Nachfolgegeneration unverändert bleibt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall für den Lachsbestand: [547; 548]
- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Interpretation.

b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$R'(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad n_E = \frac{1}{b}$

$R\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b \cdot e}$

$\Rightarrow \quad E = \left(\frac{1}{b}\middle|\frac{a}{b \cdot e}\right)$

Möglicher Nachweis:

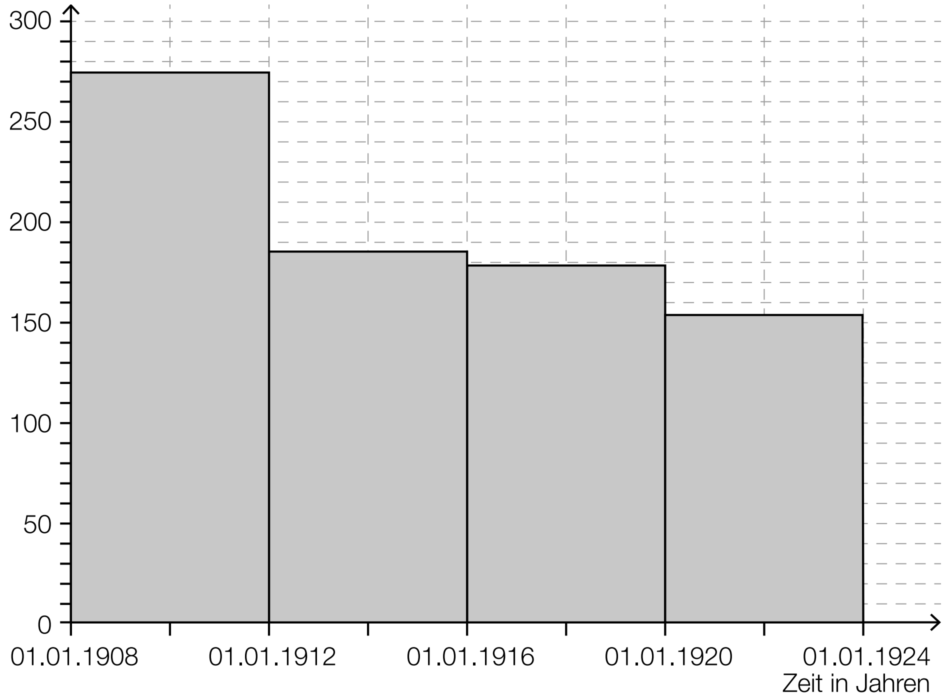
$R''\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{a \cdot b}{e} < 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow$ Maximumstelle

$\frac{a}{b \cdot e} > \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad a > e$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von E und einen korrekten Nachweis.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) Lösungserwartung:



Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	713
01.01.1916–31.12.1919	626
01.01.1920–31.12.1923	589

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für ein korrektes Histogramm.
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte in der Tabelle.

Aufgabe 4

Roulette

a) Lösungserwartung:

$P(X \geq 4) \approx 0{,}171$

Da die Spieldurchgänge voneinander unabhängig sind und somit die Ergebnisse der vorherigen Spielrunden keine Auswirkungen auf die nachfolgenden Spielrunden haben, kann der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht beeinflussen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall für $P(X \geq 4)$: [0,1; 0,2] bzw. [10 %; 20 %]
- Ein Punkt für die Angabe, dass der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht erhöhen kann, und eine korrekte Begründung.

b) Lösungserwartung:

$\left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx 0{,}00128$

Mögliche Vorgehensweise:

Bei zehn aufeinanderfolgenden verlorenen Spielrunden beträgt der Verlust € 10.230.
Endet die Spielserie mit einem Gewinn, so beträgt dieser € 10.
Erwartungswert für einen Gewinn: $(1 - 0{,}00128) \cdot 10 - 0{,}00128 \cdot 10\,230 \approx -3{,}11$
Ein negativer Erwartungswert zeigt, dass dieses Spiel langfristig gesehen für die Spielerin ungünstig ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,0012; 0,0013]
- Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

Aufgabe 1

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

a) Lösungserwartung:

Mögliche Begründung:

Berechnung der Nullstellen: $a \cdot x^3 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$
Eine Nullstelle ist daher $x_1 = 0$.

Berechnung weiterer Nullstellen: $a \cdot x^2 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{b}{a}$

Wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gilt: $-\frac{b}{a} > 0$.
Damit hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen und die Funktion f hat insgesamt drei verschiedene Nullstellen.

Mögliche Begründung:

Der Wert der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle x entspricht dem Wert $f'(x)$.
$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + b \quad \Rightarrow \quad f'(0) = b$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

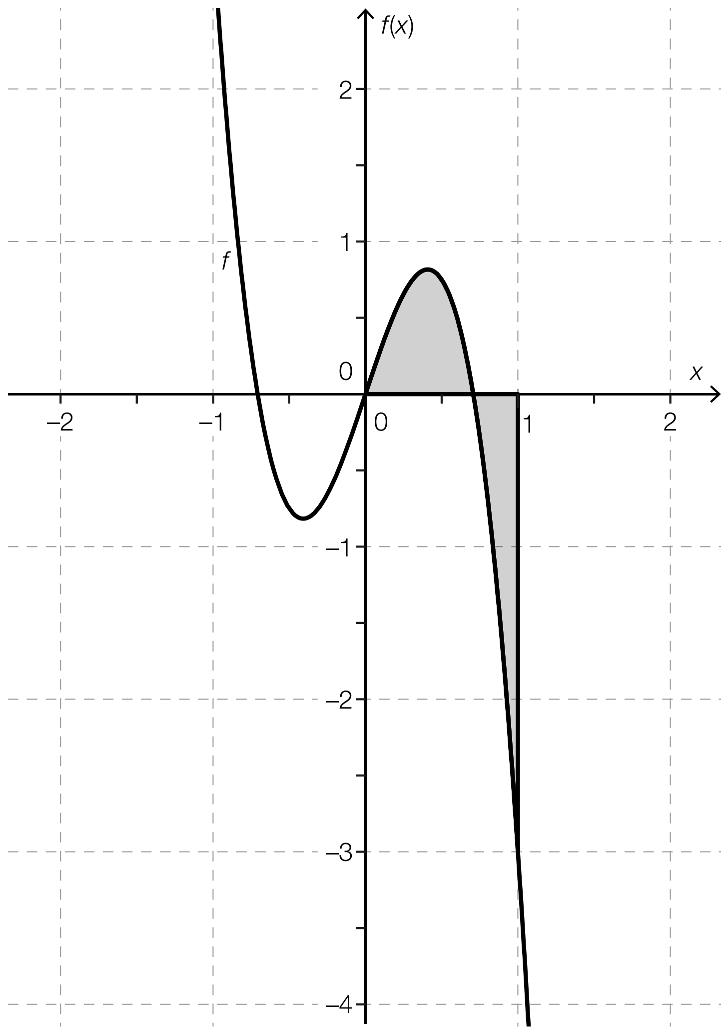
Mögliche Vorgehensweise:

$$\int_0^1 (a \cdot x^3 + b \cdot x)\,\mathrm{d}x = \left(a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \cdot b$$

Mögliche Begründung:

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte, die vom Graphen von f und von der x-Achse begrenzt werden. Hätte f keine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$, dann würde der Graph von f in diesem Intervall entweder zur Gänze oberhalb der x-Achse (mit $f(x) > 0$ für alle $x \in (0; 1)$) oder zur Gänze unterhalb der x-Achse (mit $f(x) < 0$ für alle $x \in (0; 1)$) verlaufen. Somit wäre das bestimmte Integral von f im Intervall $(0; 1)$ entweder größer oder kleiner null, aber keinesfalls gleich null.

Möglicher Graph von f:



Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Beziehung zwischen a und b.
- Ein Punkt für eine korrekte Begründung und eine Skizze eines möglichen Graphen von f. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 2

Hopfen

a) **Lösungserwartung:**

möglicher Ausdruck: $h(t_1) - h(0)$

$h(10) - h(0) \approx 6{,}45$
Die Pflanze ist in den ersten 10 Wochen um ca. 6,45 m gewachsen.
Die mit der Modellfunktion h berechnete Zunahme der Höhe der Pflanze im Zeitintervall [0; 10] ist um ca. 0,8 % größer als die in diesem Zeitintervall tatsächlich beobachtete Zunahme (6,4 m).

Lösungsschlüssel:

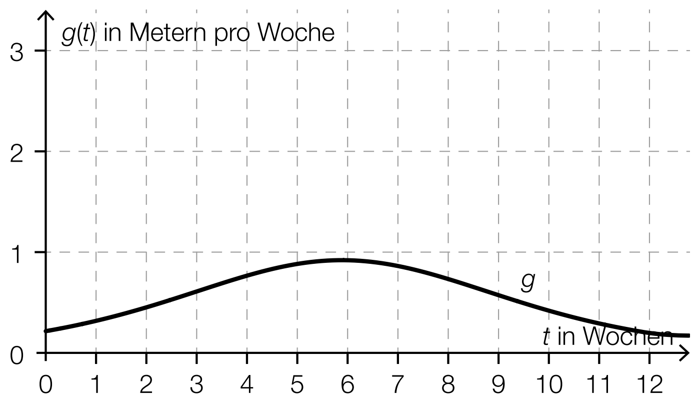
- Ein Ausgleichspunkt für einen korrekten Ausdruck. Andere korrekte Ausdrücke sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe des richtigen Wertes und der richtigen prozentuellen Abweichung. Toleranzintervall für den Wert: [6,4 m; 6,5 m]

b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Gleichung:
$h''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2$

$t_2 \approx 5{,}9$ Wochen

$h'(t_2) \approx 0{,}92$
Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. 0,92 Meter pro Woche.



Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die Angabe des richtigen Zeitpunkts, wobei die Einheit „Wochen“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [5,4 Wochen; 6,3 Wochen]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Meter pro Woche“ nicht angeführt sein muss, und eine korrekte Skizze des Graphen von g.
  Toleranzintervall: [0,90 Meter pro Woche; 1 Meter pro Woche]

c) Lösungserwartung:

Mögliche Funktionsgleichung von h_1:
$h_1(t) = 0{,}58\dot{3} \cdot t + 0{,}6$

Mögliche Interpretation:

Die Pflanze wächst in den ersten 12 Wochen durchschnittlich um ca. 58 cm pro Woche.

Mögliche Begründung:

Die Steigung von h ist anfangs kleiner als jene von h_1, dann größer und dann wieder kleiner. Es gibt daher mindestens zwei Zeitpunkte, in denen sie gleich ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung und eine korrekte Interpretation unter Verwendung korrekter Einheiten. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten. Toleranzintervall für die Steigung: [0,58; 0,59]
- Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

d) Lösungserwartung:

Möglicher Nachweis:

Für alle $k < 0$ gilt: $\lim\limits_{t \to \infty} e^{k \cdot t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t \to \infty} h(t) = \dfrac{a}{1 + b \cdot 0} = a$, also ist h_{max} unabhängig von k.
$h_{max} = a$

Für das beschriebene Pflanzenwachstum muss a vergrößert und k verkleinert werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis und die richtige Lösung. Andere korrekte rechnerische Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung der Veränderung der beiden Werte von a und k.

Aufgabe 3

Abstandsmessung

a) **Lösungserwartung:**

$q_1 = 0{,}9$
$q_3 = 2{,}1$
Etwa die Hälfte der kontrollierten Fahrzeuge halten einen Tiefenabstand von mindestens 0,9 Sekunden und höchstens 2,1 Sekunden ein.

Die im Kastenschaubild dargestellten Daten bestätigen in etwa diese Erfahrungswerte.

Mögliche Begründung:

$130 \text{ km/h} = 36{,}\dot{1} \text{ m/s}$
$36{,}\dot{1} \text{ m/s} \cdot 0{,}9 \text{ s} = 32{,}5 \text{ m}$ ⇒ Mindestens drei Viertel der Kraftfahrer/innen halten einen Abstand von 30 m und mehr ein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden richtigen Werte und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
- Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) **Lösungserwartung:**

ein möglicher größerer Prozentsatz: 25 %

Mögliche Begründung:

Der Tiefenabstand von zwei Sekunden liegt zwischen dem Median und dem dritten Quartil.

Mögliche Vorgehensweise:

Zufallsvariable X = Anzahl der Kraftfahrlenker/innen, die den empfohlenen Mindestabstand eingehalten haben

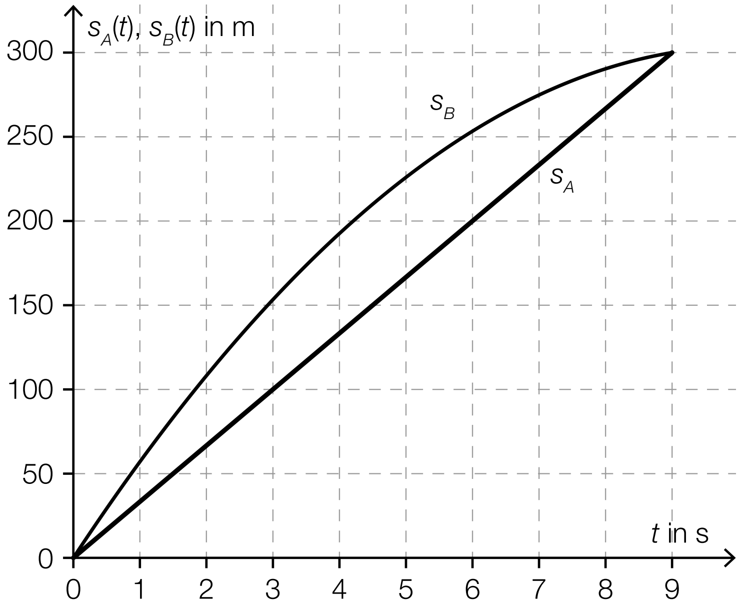
$p = 0{,}25$ ... Wahrscheinlichkeit, dass der empfohlene Mindestabstand eingehalten wurde
$n = 10$ ... Anzahl der ausgewählten Messungen
$P(X \geq 6) \approx 0{,}0197$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Wertes und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: (20 %; 25 %]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung für den von der Kandidatin / vom Kandidaten gewählten Wert richtig sein muss. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Fahrzeug A fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h.



Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Darstellung von s_A.
– Ein Punkt für eine korrekte Skizze eines möglichen Graphen von s_B.

Aufgabe 4

Bitcoin

a) **Lösungserwartung:**

Monat: August

Kursverlust: ≈ € 55

$\frac{K_2 - K_1}{\Delta T} \approx -1{,}8$

Mögliche Interpretation:

Im August 2015 betrug die durchschnittliche Kursänderung pro Tag ca. € –1,8.

oder:

Im August 2015 betrug der durchschnittliche Kursverlust pro Tag ca. € 1,8.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe des richtigen Monats sowie des korrekten Wertes für den Kursverlust.
  Toleranzintervall: [€ 50; € 70]
- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.
  Toleranzintervall: [–2,3; –1,5] bzw. [1,5; 2,3]

b) **Lösungserwartung:**

$\frac{f(8) - f(7)}{f(7)} \approx 0{,}065$

Mögliche Interpretation:

Die Anzahl der im Umlauf befindlichen Bitcoins nimmt im Zeitraum von Anfang Jänner 2016 bis Anfang Jänner 2017 um ca. 6,5 % zu.

Mögliche Gleichung:

$f(t) = 20 \cdot 10^6$

Lösung der Gleichung: $t \approx 17$
Ungefähr Anfang Jänner 2026 kann nur mehr 1 Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.
  Toleranzintervall: [0,06; 0,07] bzw. [6 %; 7 %]
- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Andere korrekte Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall [16; 17] bzw. [2025; 2026]

c) Lösungserwartung:

$n = 171 \qquad h \approx 0{,}807$

$0{,}807 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}807 \cdot (1 - 0{,}807)}{171}} \approx 0{,}807 \pm 0{,}059 \quad \Rightarrow \quad [0{,}748; 0{,}866]$

Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}880 - \frac{138}{171} \approx 0{,}073$

$0{,}073 \leq z \cdot \sqrt{\frac{0{,}807 \cdot (1 - 0{,}807)}{171}} \quad \Rightarrow \quad z \geq 2{,}418$

$2 \cdot \Phi(2{,}418) - 1 \approx 0{,}984$

Das Konfidenzniveau muss mindestens 98,4 % betragen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,74; 0,75]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,86; 0,87]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,98; 0,99] bzw. [98 %; 99 %]

Aufgabe 1

Funktion

a) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$f'(0) = b$
$x_P = 0,\ f(x_P) = c \quad \Rightarrow \quad P = (0|c)$

Steigung der Tangente: b
Abschnitt auf der senkrechten Achse: c
$\Rightarrow \quad t(x) = b \cdot x + c$

$b = 9$ und $c = 4$
$f(-1) = a - 9 + 4 = 20 \quad \Rightarrow \quad a = 25$
$\Rightarrow \quad a = 25,\ b = 9,\ c = 4$

Lösungsschlüssel:

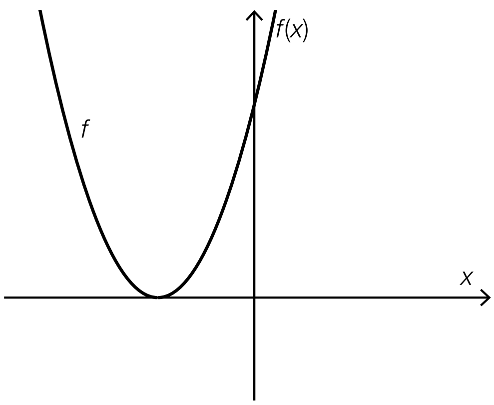
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von P und einer korrekten Gleichung von t. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte von a, b und c.

b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$
$\Rightarrow \quad a = \frac{b^2}{4 \cdot c}$

Mögliche Skizze:



Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für eine korrekte Skizze, wobei der Scheitel erkennbar auf der negativen x-Achse liegen und die Parabel nach oben geöffnet sein muss.

c) Lösungserwartung:

$f(x) = 16 \cdot x^2 + b \cdot x + 9$

$f'(x) = 32 \cdot x + b = 0 \quad \Rightarrow$ Stelle des lokalen Extremums: $x_E = -\frac{b}{32}$

Funktionswert an der Stelle x_E: $f\left(-\frac{b}{32}\right) = 9 - \frac{b^2}{64}$

$g\left(-\frac{b}{32}\right) = 9 - 16 \cdot \frac{b^2}{32^2} = 9 - \frac{b^2}{64}$, dieser Ausdruck stimmt mit dem Funktionswert an der Stelle des lokalen Extremums der Funktion f überein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden korrekten Werte.
- Ein Punkt für einen korrekten Nachweis. Andere korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 2

Ansteigende Straße

a) Lösungserwartung:

$\frac{h(60) - h(0)}{60 - 0} = \frac{10 - 0}{60} = \frac{1}{6} = 0{,}1\dot{6} \approx 0{,}17$

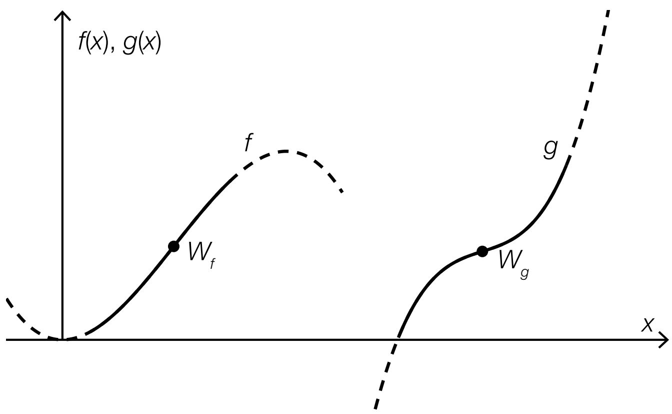
Mögliche Interpretation:

Die Straße steigt von *A* nach *B* pro Meter in waagrechter Richtung im Mittel um ca. 17 cm in senkrechter Richtung an.

Die Behauptung trifft nicht zu.

Mögliche Begründungen:

Die Wendestelle einer Funktion 3. Grades kann auch derjenigen Stelle entsprechen, an der der Anstieg minimal ist.



W_f ... Wendepunkt der Funktion *f*, in dem die Steigung der Tangente maximal ist
W_g ... Wendepunkt der Funktion *g*, in dem die Steigung der Tangente minimal ist

oder:

$f(x) = x^3$ ... Die Funktion *f* hat eine Wendestelle, an der die Steigung der Tangente minimal ist.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,16; 0,17] bzw. [16 %; 17 %].
– Ein Punkt für die richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

$h_1(x) = \frac{1}{6} \cdot x$

$\tan(\alpha) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 9{,}5°$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den Wert der Steigung der linearen Funktion h_1: [0,16; 0,17]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [9°; 10°]
  Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

$g(t) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 5 \cdot t - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 5, \ (t_2 = -10)$

Die Fahrt von *A* nach *B* dauert 5 Sekunden.

Die maximale momentane Änderungsrate der Höhe im Zeitintervall [0 s; 5 s] beträgt 3 m/s, also überschreitet die momentane Änderungsrate der Höhe während dieser Zeitspanne einen Wert von 4 m/s nicht.

Mögliche Begründung:

$g'(t) = 0{,}4 \cdot t + 1$

Die momentane Änderungsrate der Höhe ist im Intervall [0 s; 5 s] streng monoton steigend, also liegt ihr maximaler Wert an der Stelle $t = 5$.

$g'(5) = 3$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angeführt sein muss.
- Ein Punkt für die richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Human Development Index

a) Lösungserwartung:

$LEI = \frac{81{,}1 - 20}{85 - 20} = 0{,}94$

$EI \approx \frac{\ln(45\,400) - \ln(100)}{\ln(75\,000) - \ln(100)} \approx 0{,}924$

$HDI_{2013} = \sqrt[3]{0{,}94 \cdot 0{,}819 \cdot 0{,}924} \approx 0{,}893$

$HDI_{2013} = HDI_{2008} \cdot 1{,}025$

$HDI_{2008} \approx 0{,}871$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,88; 0,91]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,85; 0,89]

b) Lösungserwartung:

$k = \frac{0{,}64 - 0{,}44}{30} = 0{,}006\dot{6}$

$d = 0{,}44$

In der Region „Südasien“ entsprach die mittlere jährliche Zunahme des *HDI* im Zeitraum 1980 bis 2010 am ehesten jener der Region „arabische Staaten“.

Mögliche Begründung:

Die Sekanten durch die Punkte $(1980|0{,}44)$ und $(2010|0{,}64)$ sowie $(1980|0{,}36)$ und $(2010|0{,}54)$ verlaufen annähernd parallel zueinander.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte.
  Toleranzintervall für k: [0,005; 0,01]
  Toleranzintervall für d: [0,43; 0,45]
- Ein Punkt für die Angabe der Region „Südasien“ und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

c) Lösungserwartung:

Ab dem Jahr 2004 weist die Region „Lateinamerika und Karibik" die Entwicklungskategorie E_2 auf.

Nein, es gilt nicht als sicher, dass ab diesem Zeitpunkt ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder die Entwicklungskategorie E_2 aufweist.

Mögliche Begründung:

Wenn eine sehr kleine Anzahl an Ländern mit sehr hohen *HDI*-Werten einer großen Anzahl an Ländern mit niedrigen *HDI*-Werten (< 0,7) gegenübersteht, kann dennoch das arithmetische Mittel der *HDI*s größer als 0,7 sein, ohne dass ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder die Entwicklungskategorie E_2 aufweist.

Lösungsschlüssel:

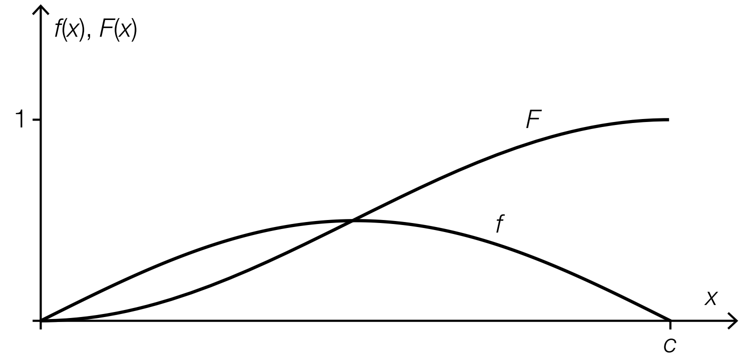
– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [2003; 2005]
– Ein Punkt für eine richtige Antwort und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen (z. B. anhand sinnvoller Zahlenbeispiele oder mit der Feststellung, dass das arithmetische Mittel nicht notwendigerweise der Median sein muss) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

a) Lösungserwartung:

$F(0) = 0$
$F(c) = 1$ bzw. $P(X \leq c) = 1$, d. h., die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert kleiner gleich c annimmt, beträgt 100 %, da $f(x) = 0$ für $x > c$.



Bis zum lokalen Maximum von f ist die Funktion F linksgekrümmt, danach ist die Funktion F rechtsgekrümmt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt für eine korrekte Skizze und eine (sinngemäß) korrekte Beschreibung des Krümmungsverhaltens der Funktion F. Die Skizze ist als korrekt zu betrachten, wenn das korrekte Krümmungsverhalten des Graphen von F in der Skizze klar erkennbar ist und die Wendestelle von F dabei bei $x = \frac{c}{2}$ liegt. Für $x > c$ muss der Graph von F, sofern er in diesem Bereich skizziert ist, waagrecht verlaufen.

b) Lösungserwartung:

Der Wert von k ist durch die Eigenschaft $F(c) = 1$ festgelegt, d. h., der Inhalt der vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0; c]$ eingeschlossenen Fläche muss 1 sein.
Da die rechte Nullstelle bei $x = \pi$ liegt und somit $c = \pi$ ist, muss gelten:
$\int_0^\pi k \cdot \sin(x)\,dx = 1 \Rightarrow k = 0{,}5$.

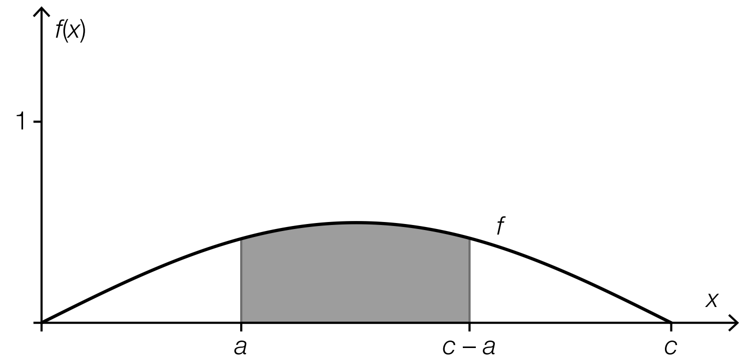
Mögliche Vorgehensweise:
$F(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x) + C$
$F(0) = 0 \Rightarrow C = 0{,}5$
$F(x) = -0{,}5 \cdot \cos(x) + 0{,}5$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe, welche Eigenschaft von f den Wert von k festlegt, und für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für einen korrekten Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Das Ereignis E beschreibt, dass die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der größer (oder gleich) $c - a$ ist.



Mögliche Begründung:

Wegen der Symmetrie der Dichtefunktion gilt: $P(X \leq a) = P(X \geq c - a)$.
Aus $F(c) = 1$ folgt: $P(a \leq X \leq c - a) = 1 - P(X \leq a) - P(X \geq c - a) = 1 - 2 \cdot P(X \leq a)$.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Beschreibung.
– Ein Punkt für eine korrekte Darstellung der Wahrscheinlichkeit als Fläche, wobei die beiden Grenzen symmetrisch zur Stelle des Maximums der Funktion f liegen müssen, und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 1

Aktivität und Altersbestimmung

a) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$A(t) = |N'(t)| = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$A_0 = \lambda \cdot N_0$

$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{17}{4{,}92 \cdot 10^{-18}} \approx 3{,}46 \cdot 10^{18}$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich ca. $3{,}46 \cdot 10^{18}$ Atomkerne von ^{238}U in der Probe.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [$3{,}4 \cdot 10^{18}$ Atomkerne; $3{,}5 \cdot 10^{18}$ Atomkerne]

b) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

lebender Organismus: $A_0 = 25 \cdot 0{,}267 = 6{,}675$ Bq für 25 g Kohlenstoff

$4 = 6{,}675 \cdot e^{-1{,}21 \cdot 10^{-4} \cdot t}$

$t \approx 4\,232$ Jahre

Mögliche Vorgehensweise:

τ ... Halbwertszeit

$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \tau}$

$\ln(2) = \lambda \cdot \tau$

$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} \approx 5\,730$

Zum Zeitpunkt des Fundes sind weniger als die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Atomkerne zerfallen, da die Halbwertszeit von ^{14}C ca. 5 730 Jahre beträgt, das Holz aber erst vor ca. 4 232 Jahren abgestorben ist.

Lösungsschlüssel:

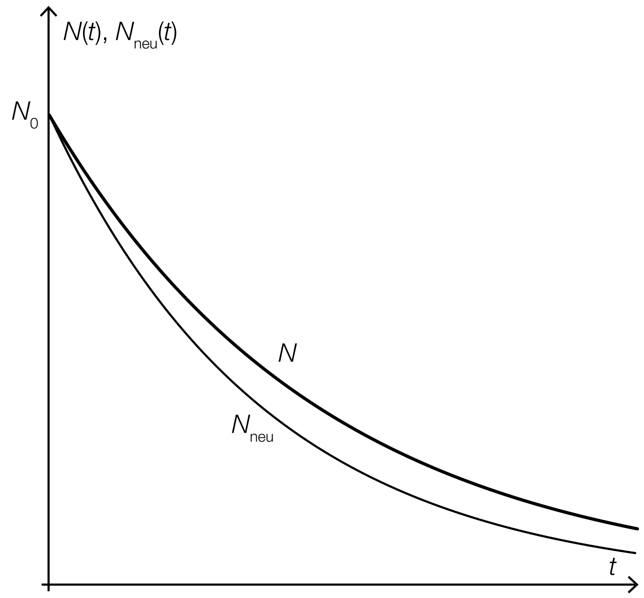
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [4 225 Jahre; 4 240 Jahre]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür, dass weniger als die Hälfte der ursprünglich vorhandenen ^{14}C-Atomkerne zerfallen sind. Andere korrekte Begründungen (z. B. über das Absinken der Aktivität) sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$$\frac{1}{2} = \frac{N(\tau)}{N_0} = \frac{N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{\tau}{c}}}{N_0} = 0{,}5^{\frac{\tau}{c}} \Leftrightarrow \frac{\tau}{c} = 1 \Leftrightarrow \tau = c$$

Die Konstante c entspricht der Halbwertszeit eines radioaktiven Stoffes.



Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die Angabe des richtigen Zusammenhangs.
– Ein Punkt für das Einzeichnen eines korrekten Verlaufs des Graphen einer möglichen Funktion N_{neu}. Der skizzierte Graph muss den Punkt $(0|N_0)$ enthalten, zwischen dem Graphen der Funktion N und der Zeitachse liegen und als Graph einer (streng) monoton fallenden linksgekrümmten Funktion erkennbar sein.

Aufgabe 2

Schwimmzonen

a) **Lösungserwartung:**

$A(x) = x \cdot (180 - 2 \cdot x) = 180 \cdot x - 2 \cdot x^2$

Mögliche Vorgehensweise:

$A'(x) = 180 - 4 \cdot x = 0 \ \Rightarrow \ x = 45$

($A''(45) = -4 < 0 \ \Rightarrow$ lokales Maximum

Aus $A''(x) < 0$ für alle x folgt, dass A rechtsgekrümmt ist und das lokale Maximum daher ein globales Maximum ist.)

Länge = 90 m
Breite = 45 m
Flächeninhalt = 4 050 m²

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für einen korrekten Nachweis. Andere korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Angabe aller drei richtigen Werte. Der Nachweis für das Vorliegen eines Maximums ist nicht erforderlich.

b) **Lösungserwartung:**

alle Werte, die x bei $h = 40$ m annehmen darf: $x \in [40; 90]$
alle Werte, die h bei $x = 50$ m annehmen darf: $h \in [0; 50]$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe eines korrekten Intervalls für x.
Andere Schreibweisen des Intervalls (offen oder halboffen) sowie korrekte formale oder verbale Beschreibungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Angabe eines korrekten Intervalls für h.
Andere Schreibweisen des Intervalls (offen oder halboffen) sowie korrekte formale oder verbale Beschreibungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

$A(\alpha) = 3600 \cdot \cos(\alpha) + 3600 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$

oder:

$A(\alpha) = 3600 \cdot \cos(\alpha) + 1800 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$

Mögliche Vorgehensweise:
größtmöglicher Flächeninhalt: bei $\alpha = 30°$
$30 + 60 + 30 = 120$
Der Strandabschnitt ist dabei 120 m lang.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Formel. Andere korrekte Formeln sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [115 m; 125 m]

Aufgabe 3

Brasilien

a) Lösungserwartung:

Im Zeitintervall [1970; 1980] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 2,515 %, im Zeitintervall [1991; 2000] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 1,607 %.

Damit eine Beschreibung durch eine Exponentialfunktion angemessen ist, müsste die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl in den beiden betrachteten Zeitintervallen annähernd gleich sein. Im Zeitintervall [1970; 1980] ist die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl mit ca. 2,5 % deutlich größer als im Zeitintervall [1991; 2000], wo es nur mehr ca. 1,6 % beträgt. Daher wäre eine Beschreibung der Entwicklung der Einwohnerzahl durch eine Exponentialfunktion nicht angemessen.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung der beiden Werte.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$f(t) = 146\,917\,459 + k \cdot t$

$k = \frac{190\,755\,799 - 146\,917\,459}{19} \approx 2\,307\,281$

$f(t) = 146\,917\,459 + 2\,307\,281 \cdot t$

Mögliche Vorgehensweise:

$f(23) = 199\,984\,922$

$\frac{199\,984\,922}{202\,740\,000} \approx 0{,}986$

Die Abweichung zur Vorhersage beträgt ca. 1,4 %.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für k: [2 305 000; 2 310 000]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Abweichung auch als negativer Wert angegeben sein kann.
  Toleranzintervall: [1 %; 2 %] bzw. [0,01; 0,02]

c) Lösungserwartung:

Mögliche Deutung:

Der angeführte Ausdruck gibt die Anzahl derjenigen Personen an, die die Einwohnerzahl x_n im Zeitintervall $[n; n + 1]$ aufgrund von Geburten und/oder Todesfällen erhöhen (bzw. verringern).

Mögliche Vorgehensweise:

$x_{2015} \leq 1{,}01 \cdot x_{2014}$

$x_{2014} + x_{2014} \cdot \frac{14{,}6 - 6{,}6}{1\,000} + m_{2014} \leq 1{,}01 \cdot x_{2014}$

daher

$m_{2014} \leq \left(1{,}01 - 1 - \frac{14{,}6 - 6{,}6}{1\,000}\right) \cdot x_{2014}$

$m_{2014} \leq 0{,}002 \cdot 202\,740\,000 = 405\,480$

Damit die Einwohnerzahl im Jahr 2015 gegenüber der Einwohnerzahl im Jahr davor maximal um 1 % größer wird, dürfen höchstens 405 480 Personen mehr zuwandern als abwandern.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Deutung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [405 000 Personen; 406 000 Personen]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 4

Wachstumskurve von Kindern

a) Lösungserwartung:

Stichprobenanteil: 0,9
Anteil laut Diagramm: 0,94
Unterschied: 4 Prozentpunkte

Mögliche Berechnung:
$0{,}9465 = 0{,}9 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9 \cdot (1 - 0{,}9)}{n}} \Rightarrow n \approx 160$ Buben

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [155 Buben; 165 Buben]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) Lösungserwartung:

Die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum entspricht einem Drittel der Größenzunahme.

oder:

$\frac{g(9) - g(6)}{3}$

Das ungefähre Alter von Buben, bei dem deren momentane Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist, liegt bei ca. 13 Jahren.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Antwort bzw. eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Jahre“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [12 Jahre; 14 Jahre]

c) Lösungserwartung:

Die statistische Kennzahl, die demjenigen Wert entspricht, den man auf dem 50. Perzentil ablesen kann, ist der Median.

Die Schwierigkeiten bestehen darin, dass man zwar das 1. und das 3. Quartil sowie den Median, jedoch weder Minimum noch Maximum ablesen kann (und auch keine Informationen bezüglich Ausreißern hat).

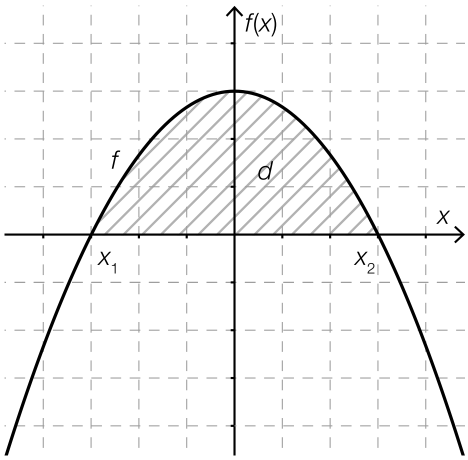
Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für das Anführen der korrekten statistischen Kennzahl.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erläuterung.

Aufgabe 1

Quadratische Funktion

a) Lösungserwartung:



$a < 0$, $b = 0$ und $c > 0$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Veranschaulichung des Wertes d, wobei der Graph von f klar erkennbar die Form einer achsensymmetrischen und nach unten offenen Parabel haben muss.
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Bedingungen für die Koeffizienten a, b und c.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:
$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$
$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0 \Rightarrow (x_1 = 0),\ x_2 = -\frac{b}{a}$ mit $a > 0$ und $b < 0$

Mögliche Berechnung des gesuchten Flächeninhalts:
$\int_{-\frac{b}{a}}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$

oder:

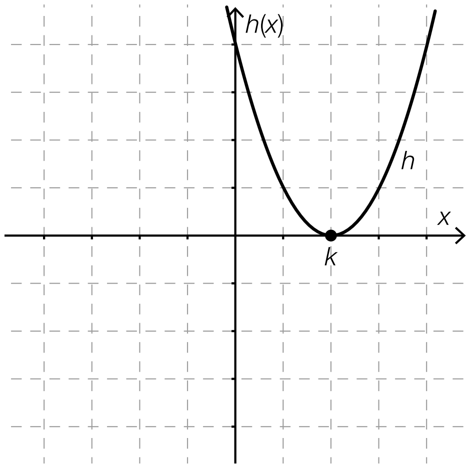
$-\int_{0}^{x_2} g(x)\,\mathrm{d}x$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Formel, wobei die Bedingungen $a > 0$ und $b < 0$ nicht angeführt werden müssen. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für ein korrektes bestimmtes Integral. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Möglicher Graph von h:



$h(k) = k^2 - 2 \cdot k^2 + k^2 = 0 \;\Rightarrow\; h(k) = 0$
$h'(x) = 2 \cdot x - 2 \cdot k$
$h'(k) = 2 \cdot k - 2 \cdot k = 0 \;\Rightarrow\; h'(k) = 0$

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Skizze eines entsprechenden Graphen von h. Der Graph von h muss die Form einer nach oben oder unten offenen Parabel haben und an der gekennzeichneten Stelle von k müssen die Nullstelle und (somit) die Extremstelle der Funktion h klar erkennbar sein, die Symmetrie bezüglich der Geraden $x = k$ muss erkennbar sein.
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis beider Bedingungen.

Aufgabe 2

Muskelkraft

a) Lösungserwartung:

$F(0) \approx 2\,900$ N

$F(0)$ gibt den Wert derjenigen Kraft an, die der Muskel bei einer Kontraktionsgeschwindigkeit von $v = 0$ aufbringt.

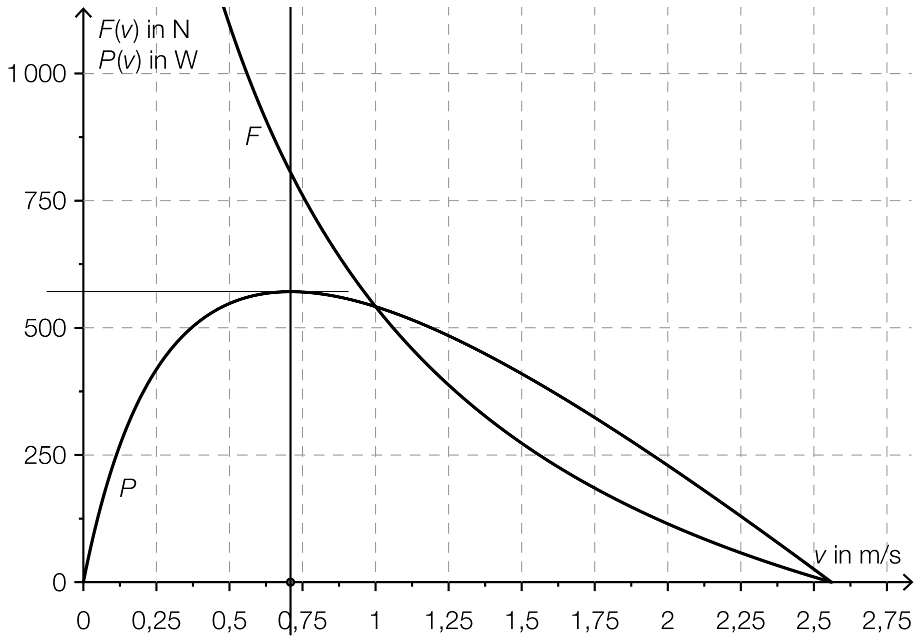
Zwischen F und v wird keine indirekte Proportionalität beschrieben.

Mögliche Begründung:
Eine Verdoppelung der Kontraktionsgeschwindigkeit v führt nicht zu einer Halbierung der Muskelkraft F.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung, wobei die Einheit „Newton“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [2 750 N; 3 000 N]
- Ein Punkt für die Angabe, dass keine indirekte Proportionalität beschrieben wird, und eine korrekte Begründung.

b) Lösungserwartung:



Bei ungefähr 800 N erreicht der Muskel seine maximale Leistung.

$v_1 \approx 0{,}7$ m/s

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Newton" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [650 N; 950 N]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [0,6 m/s; 0,9 m/s]

Aufgabe 3

Zerstörung des Tropenwaldes

a) Lösungserwartung:

$f_1(t) = 800 \cdot 0{,}979^t$

$800 \cdot 0{,}979^t < 100 \;\Rightarrow\; t > 97{,}977...$

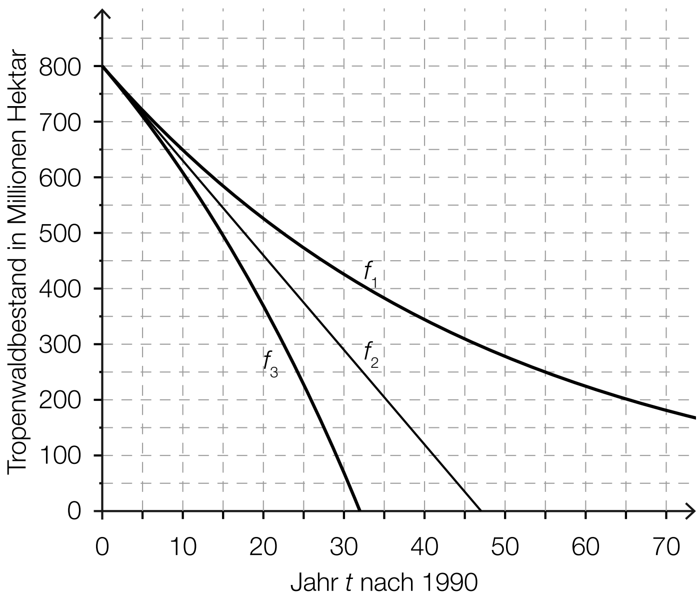
Nach Szenario 1 wird der Tropenwaldbestand nach ca. 98 Jahren auf weniger als 100 Millionen Hektar gesunken sein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Jahre" nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: [93 Jahre; 104 Jahre]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) Lösungserwartung:

$f_2(t) = -17 \cdot t + 800$ (bzw. $f_2(t) = -17\,000\,000 \cdot t + 800\,000\,000$)



Entsprechend diesem Modell würde der Tropenwald im Laufe des Jahres 2037 verschwinden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung.
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Jahreszahl sowie eines korrekten Graphen, wobei dieser als Gerade erkennbar sein muss, die durch (0|800) verläuft und deren Schnittpunkt mit der Zeitachse im Toleranzintervall [45; 50] liegt.
  Toleranzintervall für das gesuchte Jahr: [2035; 2040]

c) Lösungserwartung:

$t_1 \approx 15$ (also im Jahr 2005)

$\int_0^{t_1} f_3'(t)\,\mathrm{d}t \approx -300$ (bzw. $-300\,000\,000$)
In den 15 Jahren nach 1990 wurden ca. 300 Millionen Hektar Tropenwald gerodet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [14; 16] bzw. [2004; 2006]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch der Betrag der Lösung als richtig zu werten ist, sowie für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.
  Toleranzintervall: [–350; –250] (bzw. [–350 000 000; –250 000 000])

d) Lösungserwartung:

Eine Übereinstimmung ist am ehesten mit dem Szenario 3 festzustellen, da dieses Modell ebenso von einer jährlich zunehmenden Abholzungsrate ausgeht.

Das Modell von Meadows sagt für diesen Zeitraum eine deutlich größere Änderung der Abholzungsrate voraus.

Mögliche Begründung:
Der Betrag der Steigung der Funktion f_3' ist im Zeitraum 2000 bis 2012 deutlich größer als 0,2101.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt für eine richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung.

Aufgabe 4

Buccolam

a) Lösungserwartung:

$V(D) = 0{,}2 \cdot D$

Zwischen dem Alter (in Jahren) der Patientin/des Patienten und der zu verabreichenden Midazolam-Dosis besteht kein linearer Zusammenhang.

Mögliche Begründung:

Bei einem linearen Zusammenhang würden z. B. 3-jährige Kinder eine niedrigere Dosis als 4-jährige Kinder erhalten. Laut Tabelle ist dies nicht der Fall.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für eine richtige Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen (z. B. mithilfe einer Skizze oder mit einem Hinweis auf das Vorliegen einer unstetigen Funktion) sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

Da bei 22 von 440 Kindern die Nebenwirkung „Übelkeit und Erbrechen“ auftrat, beträgt die relative Häufigkeit $\frac{22}{440} = 0{,}05$.
Wegen $0{,}01 \leq 0{,}05 < 0{,}1$ würde sich für die Nebenwirkung „Übelkeit und Erbrechen“ die Klassifizierung „häufig“ ergeben.

Mögliche Vorgehensweise:

$\mu = 4{,}4 \quad \sigma \approx 2{,}09 \;\Rightarrow\; [\mu - \sigma;\ \mu + \sigma] \approx [2{,}31;\ 6{,}49]$

Die Nebenwirkung „Hautausschlag“ muss demnach bei mindestens drei und darf bei höchstens sechs Kindern der erwähnten Studie auftreten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Klassifizierung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) Lösungserwartung:

$n = 440, \ h = 0{,}7$

$0{,}7 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{440}} \approx 0{,}7 \pm 0{,}04 \ \Rightarrow \ [0{,}66; 0{,}74]$

Die Werte $n_1 < 400$ und $\gamma_1 = 0{,}99$ würden zu einem wesentlich breiteren Konfidenzintervall führen und können daher nicht die Grundlage zur Berechnung gewesen sein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,65; 0,66]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,74; 0,75]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

Aufgabe 1

Graphen von Polynomfunktionen dritten Grades

a) Lösungserwartung:

Mögliche Begründung:

Nur an denjenigen Stellen, an denen $f'(x) = 0$ ist, können lokale Extremstellen von f liegen. Die Ableitungsfunktion f' ist eine Polynomfunktion zweiten Grades. Da die quadratische Gleichung $f'(x) = 0$ maximal zwei Lösungen hat, kann die Funktion f höchstens zwei Extremstellen haben.

Mögliche Vorgehensweise:

Die 1. Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ hat genau eine Nullstelle bei $x = 1$ und hat sowohl links als auch rechts von der Nullstelle positive Werte. Damit ist die Funktion f auf ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend und hat keine Extremstelle.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.
– Ein Ausgleichspunkt für einen korrekten Nachweis. Andere korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

$b = 0$
$d = 0$

$$\int_{-x_1}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Mögliche Begründung:

Wegen der Symmetrie des Graphen von f bezüglich des Ursprungs begrenzt der Graph von f mit der x-Achse in den Intervallen $[-x_1; 0]$ und $[0; x_1]$ zwei gleich große Flächenstücke, von denen eines oberhalb und eines unterhalb der x-Achse liegt.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte.
– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Begründung.

c) Lösungserwartung:

$f''(x) = 0$
$6a \cdot x + 2b = 0$
$x = -\frac{b}{3a}$
$x = 0 \;\Rightarrow\; b = 0$

$f'(x) = 3a \cdot x^2 + c$
$f'(0) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Aufgabe auch bei korrektem Ansatz als richtig gelöst zu werten ist.

Aufgabe 2

Ebola

a) Lösungserwartung:

$4\,963 - 4269$ gibt die absolute Zunahme der Erkrankungen in dieser Woche an.

$\frac{4\,963 - 4\,269}{4\,269}$ gibt die relative Zunahme der Erkrankungen in dieser Woche an.

prognostizierte Erkrankungen für den 20. September 2014:
lineares Modell: $4\,963 + (4\,963 - 4\,269) = 5\,657$
exponentielles Modell: $4\,963 \cdot \left(\frac{4\,963 - 4\,269}{4\,269} + 1\right) \approx 5\,770$

Das exponentielle Modell ist eher angemessen, da es näher beim tatsächlichen Wert von 5 843 Erkrankungen liegt.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung beider Ausdrücke.
– Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte und die Angabe der entsprechenden angemessenen Modellierung.
  Toleranzintervall für den exponentiellen Wert: [5 450; 5 960]

b) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:
$f(0) = 4\,269$
$f(14) = 5\,843 = 4\,269 \cdot b^{14}$
$b = \sqrt[14]{\frac{5\,843}{4\,269}} \approx 1{,}0227$
$t = \frac{\ln\left(\frac{20\,000}{4\,269}\right)}{\ln(1{,}0227)} \approx 68{,}80$, also am 69. Tag nach dem 6. September 2014. Dieser Zeitpunkt ist Mitte November.

Die Aussage der Wissenschaftler, es könne bis Mitte Oktober 2014 bereits 20 000 Erkrankungsfälle geben, erscheint daher (nach vorliegendem Modell) nicht gerechtfertigt.

Lösungsschlüssel:

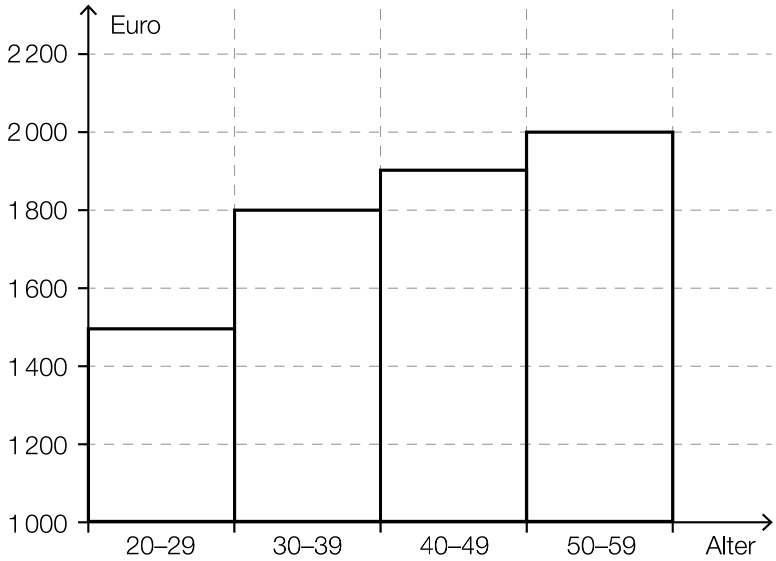
– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [1,02; 1,03]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung und einen (sinngemäß) korrekten Vergleich.
  Toleranzintervall: [68; 70]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 3

Nettomonatseinkommen

a) **Lösungserwartung:**

Mögliches Diagramm:



Die Gegenüberstellung der Nettomonatseinkommen in Boxplots (Kastenschaubildern) ist anhand der gegebenen Daten nicht möglich, da die niedrigsten und die höchsten Nettomonatseinkommen (Minimum und Maximum) in der Tabelle nicht angegeben sind.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für ein korrektes Diagramm.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.

b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Begründung:

Die angeführte Rechnung ist falsch, da die Anzahl der Erwerbstätigen in den einzelnen Altersklassen nicht berücksichtigt ist.

Ein richtiger Ansatz lautet:

$$\frac{799{,}4 \cdot 173{,}5 + 1\,487 \cdot 705{,}1 + 1\,885{,}7 \cdot 803{,}1 + 2\,086{,}1 \cdot 1\,020{,}4 + 2\,205 \cdot 632{,}8 + 2\,144{,}7 \cdot 73}{3\,407{,}9}$$

Mögliche Begründung:

In der Altersklasse 60+ weichen die sehr hohen Nettomonatseinkommen viel stärker vom Medianeinkommen ab als die sehr niedrigen Einkommen.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung und einen korrekten Ansatz.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.

c) Lösungserwartung:

1. Quartil: € 677,0
3. Quartil: € 1.564,0

Die Behauptung ist richtig, wie die folgenden Interquartilsabstände zeigen:
Lehrabschluss: € 840
BMS-Abschluss: € 1.032
Abschluss einer höheren Schule: € 1.406
Universitätsabschluss: € 1.618

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die Angabe beider korrekten Werte.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.

d) Lösungserwartung:

Die Aussage ist nicht richtig.

Mögliche Begründungen:
Für diesen Vergleich muss der relative Anteil (in Prozent) der Arbeiter/innen als Grundwert verwendet werden.
oder:
In der Aussage wurde ein relativer Zuwachs (in Prozent) mit einem Zuwachs von Prozentpunkten verwechselt.

Höchstens ein Viertel der Arbeiter/innen verdient mehr als € 1.922.	☒
Die Spannweite des Nettomonatseinkommens kann anhand der Daten in der Tabelle nicht exakt angegeben werden.	☒

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage nicht richtig ist, und eine (sinngemäß) richtige Begründung. Eine richtige Berechnung des relativen Anteils (ca. 75 % mehr Angestellte) ist auch als richtig zu werten.
– Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 4

Sonnenstrom in Österreich

a) Lösungserwartung:

$\frac{f(13) - f(0)}{13} \approx 46{,}8$

Im Zeitraum von 2000 bis 2013 hat die Leistung durchschnittlich um ca. 47 MW pro Jahr zugenommen.

Das Integral gibt näherungsweise an, wie viel elektrische Energie („Sonnenstrom“) in den Jahren 2000 bis 2013 mithilfe von Solarzellen insgesamt erzeugt wurde.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Toleranzintervall: [46 MW; 47 MW]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

b) Lösungserwartung:

Im Zeitintervall [9 Jahre; 12 Jahre] kommt es jährlich ungefähr zu einer Verdoppelung der Leistung.

$\frac{f(12) - f(9)}{f(9)} + 1 = b^3$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) Lösungserwartung:

$\alpha = 90° + \delta - \varphi = 113{,}5° - \varphi$

$\beta_{opt} + 90° + \alpha = 180° \Rightarrow \beta_{opt} = 90° - \alpha$

Mögliche Begründung:
Da der Einfallswinkel in höheren Breiten bzw. im Winter kleiner ist, vergrößert sich die optimale Neigung der Fotovoltaikmodule.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für eine korrekte Formel, eine korrekte Schlussfolgerung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Aufgabe 1

Schilauf-Trainingsstrecke

a) Lösungserwartung:

$\overline{v} = \frac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = \frac{23{,}4375 - 0}{3} \approx 7{,}8$

Die mittlere Geschwindigkeit innerhalb der ersten drei Fahrsekunden beträgt ca. 7,8 m/s.

Mögliche Berechnung:

$-\frac{1}{144} \cdot t^4 + \frac{8}{3} \cdot t^2 = 240 \;\Rightarrow\; {}_1t_2 = \pm 12;\; {}_3t_4 \approx \pm 15{,}5$

also: $t = 12$ s

Die Fahrt von *A* nach *B* dauert 12 Sekunden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: [7,5 m/s; 8 m/s]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

$s'(t) = -\frac{1}{36} \cdot t^3 + \frac{16}{3} \cdot t$

$s''(t) = -\frac{1}{12} \cdot t^2 + \frac{16}{3}$

$s''(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{12} \cdot t^2 + \frac{16}{3} = 0 \;\Rightarrow\; {}_1t_2 = \pm 8$

also: $t_1 = 8$ s

Mögliche Interpretation:

Die Läuferin erreicht nach 8 Sekunden die maximale Geschwindigkeit.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

c) Lösungserwartung:

$s'(t) = -\frac{1}{36} \cdot t^3 + \frac{16}{3} \cdot t \;\Rightarrow\; s'(6) = 26$

Zum Zeitpunkt $t_2 = 6$ hat die Läuferin eine Geschwindigkeit von 26 m/s.

Mögliche Berechnung:
$s(6) = 87 \;\Rightarrow\; \frac{240 - 87}{26} \approx 5{,}9$

Die Läuferin würde den Geländepunkt B ca. 5,9 s nach dem Zeitpunkt t_2 erreichen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angegeben sein muss.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: [5,8 s; 5,9 s]

d) Lösungserwartung:

Die Funktion s_1 muss die Eigenschaften
- $s_1'(0) = 0$ und
- $s_1'(t) > 0$ während der Fahrt von A nach B

erfüllen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Nennung der Eigenschaft $s_1'(0) = 0$.
- Ein Punkt für die Nennung der Eigenschaft $s_1'(t) > 0$.

Aufgabe 2

Bevölkerungswachstum in den USA

a) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:

$B_0 = 3{,}9$ und $B(100) = 62{,}9 \Rightarrow 62{,}9 = 3{,}9 \cdot a^{100} \Rightarrow a = \sqrt[100]{\frac{62{,}9}{3{,}9}} \Rightarrow a \approx 1{,}0282$

$B(t) = 3{,}9 \cdot 1{,}0282^t$

Das bestimmte Integral $\int_0^{50} B'(t)\,dt$ gibt denjenigen Wert näherungsweise an, um den die Einwohnerzahl von 1790 bis 1840 gewachsen ist.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
Toleranzintervall für a: [1,028; 1,029]
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

b) **Lösungserwartung:**

$t^* = 0$

$B_0 \cdot \ln(a)$ ist die Wachstumsgeschwindigkeit der Bevölkerung (momentane Änderungsrate der Einwohnerzahl) zum Zeitpunkt $t = 0$ in Millionen Einwohner/innen pro Jahr.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

c) **Lösungserwartung:**

Mögliche Begründung:
Im Zeitraum von 2003 bis 2013 ist die (absolute) Zunahme der Bevölkerung pro Jahr annähernd konstant.

Der Parameter k entspricht der (durchschnittlichen) Zunahme der Bevölkerung pro Jahr.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung.
– Ein Punkt für die (sinngemäß) richtige Interpretation des Parameters k.

Aufgabe 3

Pong

a) Lösungserwartung:

$\tan(\alpha) = \frac{7}{4} = 1{,}75$

$\alpha \approx 60{,}26°$

Unter diesen Bedingungen lautet der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} \pm 19 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ Pixel pro Bildaufbau.
Für den Winkel β_{min} gibt das in jedem Fall:

$\tan(\beta_{min}) = \frac{1}{19}$

$\beta_{min} \approx 3{,}01°$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad" nicht angegeben sein muss. Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [60°; 60,3°]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad" nicht angegeben sein muss. Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [3°; 3,02°]

b) Lösungserwartung:

$301 - 3n = 1 \;\Rightarrow\; n = 100$
$100 \cdot 0{,}02 = 2$

Es dauert zwei Sekunden, bis der Ball am unteren Spielfeldrand reflektiert wird.

$g\colon X = \begin{pmatrix} 601 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [2 s; 2,02 s]
- Ein Punkt für eine korrekte Parameterdarstellung bzw. Gleichung der Geraden. Äquivalente Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen sind als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

$n = 45$, $h = \frac{31}{45}$

$$\frac{31}{45} \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{31}{45} \cdot \frac{14}{45}}{45}} \approx 0{,}689 \pm 0{,}135 \;\Rightarrow\; [0{,}554;\, 0{,}824]$$

Mögliche Erklärungen:
Es ist nicht sinnvoll, ein 100-%-Konfidenzintervall zu bilden, da die Intervallgrenzen dann 0 % bis 100 % wären, man hätte also keinen Informationsgewinn.

oder:

Ein 100-%-Konfidenzintervall erstreckt sich über den gesamten Definitionsbereich.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,54; 0,56]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,81; 0,83]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erklärung.

Aufgabe 4

Roulette

a) **Lösungserwartung:**

Die Argumentation ist falsch. Da die einzelnen Spiele unabhängig voneinander sind, gilt auch für das sechste Spiel (unabhängig von den vorherigen Spielausgängen):

$P(\text{„Rouge"}) = P(\text{„Noir"}) = \frac{18}{37}$

Mögliche Berechnung (z. B. durch Approximation durch die Normalverteilung ohne Stetigkeitskorrektur):

Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt, wie oft die Kugel in ein rotes Nummernfach fällt.

$n = 100$, $p = \frac{18}{37}$

$P(X \leq 40) \approx 0{,}0418$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe, dass die Argumentation nicht richtig ist, und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei Ergebnisse durch Berechnung mit Stetigkeitskorrektur oder exakt mittels Binomialverteilung ebenfalls als richtig zu werten sind. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,03; 0,06]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Berechnung:

Bei 12^M erhält die Spielerin bei einem Einsatz von € 10 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{37}$ einen Gewinn von € 20.

$\frac{12}{37} \cdot 20 - \frac{25}{37} \cdot 10 \approx -0{,}27$

D. h., der erwartete Verlust beträgt ca. € 0,27.
Bankvorteil: € 0,27 bzw. 2,7 % des Einsatzes

Cheval bei einem Einsatz von € a:
erwarteter Gewinn: $\frac{2}{37} \cdot 17 \cdot a - \frac{35}{37} \cdot a = -\frac{1}{37} \cdot a \approx -0{,}027 \cdot a$
Der Bankvorteil bleibt mit ca. 2,7 % des Einsatzes gleich.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei diese sowohl in Prozentangabe als auch als Geldbetrag als richtig zu werten ist.
Toleranzintervall: [€ 0,27; € 0,30] bzw. [2,7 %; 3 %]
– Ein Punkt für die Angabe, dass der Bankvorteil gleich bleibt, und für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

Aufgabe 1

Intercity-Express (ICE)

a) Lösungserwartung:

mittlere Änderungsrate: 0,131 m/s²
möglicher Zeitpunkt für die momentane Änderungsrate: t = 150 s

Der Wert des angegebenen bestimmten Integrals entspricht dem im Zeitintervall [0 s; 700 s] zurückgelegten Weg (in Metern).

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe sowohl einer korrekten mittleren Änderungsrate als auch eines entsprechenden Zeitpunkts, wobei die Einheiten „m/s²“ bzw. „s“ nicht angeführt sein müssen.
Toleranzintervall für die mittlere Änderungsrate: [0,130 m/s²; 0,133 m/s²]
Toleranzintervall für den Zeitpunkt: [0 s; 230 s]
– Ein Ausgleichspunkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

b) Lösungserwartung:

$v_2(t) = 70 - 0{,}5 \cdot t$

Mögliche Deutungen von k:
Die Geschwindigkeit nimmt während des Bremsvorgangs in jeder Sekunde (konstant) um 0,5 m/s ab.

oder:

Die Beschleunigung (ist konstant und) beträgt –0,5 m/s².

oder:

Die Verzögerung durch das Bremsen (ist konstant und) beträgt 0,5 m/s².

Mögliche Deutung von d:
Die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorgangs beträgt 70 m/s.

$v_2(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 140\text{ s} \;\Rightarrow\; s(140) = 4\,900\text{ m}$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung beider Parameter. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angeführt sein muss.

Aufgabe 2

ZAMG-Wetterballon

a) Lösungserwartung:

$\frac{800 - 906}{906} \approx -0{,}117$

Der Luftdruck nimmt bei diesem Anstieg um ca. 11,7 % ab.

Eine Exponentialfunktion eignet sich in diesem Fall, da eine gleiche Zunahme der Höhe h stets eine Verminderung des Luftdrucks um den annähernd gleichen Prozentsatz vom jeweiligen Ausgangswert bewirkt (z. B. Höhenzunahme um 1 000 m ⟷ Luftdruckabnahme um ca. 12 %).

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [–0,12; –0,115] bzw. [–12 %; –11,5 %]
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

b) Lösungserwartung:

Eine lineare Funktion eignet sich in diesem Fall, da eine gleiche Zunahme der Höhe h stets eine gleiche Verminderung der Temperatur vom jeweiligen Ausgangswert bewirkt (z. B. Höhenzunahme um 1 000 m ⟷ Temperaturverminderung um 8,8 °C).

$k = -0{,}0088$
$d = 22{,}1$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
– Ein Punkt die korrekte Angabe beider Parameterwerte k und d.
  Toleranzintervall für k: [–0,009; –0,0088]

c) Lösungserwartung:

$V(p) = \frac{2\,718}{p}$
$V(800) - V(906) = 0{,}3975$

Die absolute Änderung des Ballonvolumens in diesem Höhenintervall beträgt 0,3975 m^3.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m^3“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [0,39 m^3; 0,4 m^3]

Aufgabe 3

Einkommensteuer

a) Lösungserwartung:

$20\,000 - 9\,000 \cdot 0{,}365 = 16\,715 \;\Rightarrow\; € \, 16.715$

Mögliche Formeln:

$N = E - (E - 11\,000) \cdot 0{,}365$

oder:

$N = 11\,000 + (E - 11\,000) \cdot 0{,}635$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€" nicht angegeben sein muss.
  Toleranzintervall: [€ 16.700; € 16.720]
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Formel für das Jahresnettoeinkommen.
  Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

$\frac{14\,000 \cdot 0{,}365 + 15\,000 \cdot 0{,}432}{40\,000} \approx 0{,}29$, d. h. ca. 29 % Durchschnittssteuersatz

Mit dem Term wird die Steuerersparnis (in Euro) dieser Person durch das neue Steuermodell (im Vergleich zum 2015 gültigen Modell) berechnet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,28; 0,29] bzw. [28 %; 29 %]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation.

c) Lösungserwartung:

Beide Behauptungen sind falsch.

(1) Auch Bezieher/innen von einem steuerpflichtigen Jahreseinkommen von € 100.000 bezahlen beim neuen Steuermodell weniger Einkommensteuer, nämlich für die Einkommensanteile unter € 90.000.
(2) Tatsächlich ändert sich der Steuersatz für das steuerpflichtige Jahreseinkommen um 11,5 *Prozentpunkte*, das sind $\frac{11{,}5}{36{,}5} \approx 31{,}5$ *Prozent*.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung, warum die Behauptung (1) falsch ist.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Begründung, warum die Behauptung (2) falsch ist.

d) Lösungserwartung:

$\frac{15\,125}{35\,000} \approx 0{,}432$ ist der Steuersatz für diese Einkommensklasse.
5 110 ist die Einkommensteuer für die ersten € 25.000 an steuerpflichtigem Jahreseinkommen.

ESt_{neu} = (steuerpflichtiges Jahreseinkommen – 31 000) · 0,42 + 6 300

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation beider Zahlenwerte.
– Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Würfel mit unterschiedlichen Zahlen

a) Lösungserwartung:

mögliche Werte für Y: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Bei Y hat jeder Wert die gleiche Wahrscheinlichkeit $\left(= \frac{1}{9}\right)$, bei X hat 4 die größte Wahrscheinlichkeit $\left(= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\right)$. Der Unterschied ist bei 4 am größten, er beträgt $\frac{2}{9}$.
oder:
Die Wahrscheinlichkeit für 4 ist bei Herrn Fischer dreimal so groß wie bei Frau Fischer.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die vollständige Angabe der korrekten Werte für Y.
- Ein Punkt für die Angabe des gesuchten Wertes und einer korrekten Berechnung des Unterschieds.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

Zufallsvariable X = Anzahl der Spiele, bei denen die Summe der drei geworfenen Zahlen genau null ist

P(„Summe der drei geworfenen Zahlen ist null") $= p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{9}$

Binomialverteilung mit den Parametern $n = 5$, $k = 2$, $p = \frac{1}{9}$

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 \approx 0{,}087 \;\Rightarrow$ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit liegt bei ca. 8,7 %.

Mögliche Berechnung:

x ... Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe

$2 \cdot \frac{1}{9} + x \cdot \frac{1}{27} < 2 \;\Rightarrow\; x < 48$

Die Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe darf höchstens € 48 betragen, damit der Anbieter des Spiels langfristig mit keinem Verlust rechnen muss.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,08; 0,09] bzw. [8 %; 9 %]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€" nicht angegeben sein muss.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) Lösungserwartung:

$n = 100$ und $p = 0,5$

Erwartungswert: $E(Z) = 50$
Standardabweichung: $\sqrt{V(Z)} = 5$

Mögliche Berechnung (z. B. durch Approximation durch die Normalverteilung ohne Stetigkeitskorrektur):
Die Summe ist größer als 350, wenn die Anzahl der Sechser mindestens 59 ist.
Es ist möglich, die (für die Anzahl der Sechser) zugrunde liegende Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0,5$ durch die Normalverteilung mit $\mu = 50$ und $\sigma = 5$ zu approximieren.

$P(Z \geq 59) \approx 0,036 = 3,6\ \%$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte für den Erwartungswert und die Standardabweichung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei Ergebnisse durch Berechnung mit Stetigkeitskorrektur oder exakt mittels Binomialverteilung ebenfalls als richtig zu werten sind.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
  Toleranzintervall: [0,035; 0,045] bzw. [3,5 %; 4,5 %]

Aufgabe 1

Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

a) Lösungserwartung:

$p = -\left(\frac{1}{z} + z\right)$

$q = \frac{1}{z} \cdot z = 1$, q ist somit unabhängig von z

Die reziproke quadratische Gleichung hat genau eine Lösung, wenn $z = 1$ oder $z = -1$ ist.
Minimumstelle für $z = 1$: bei $x = 1$
Minimumstelle für $z = -1$: bei $x = -1$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Parameter p und q in Abhängigkeit von z. Äquivalente Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte von z und der jeweils richtigen Minimumstelle.

b) Lösungserwartung:

$x^2 + p \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1}$

Da der Ausdruck $\frac{p^2}{4}$ für alle $p \in \mathbb{R}$ größer oder gleich null ist, ist der Ausdruck unter der Wurzel (die Diskriminante) positiv. Somit gibt es genau zwei Lösungen in $\mathbb{R}$.

Mögliche Begründungen:

Jeder mögliche Funktionsgraph von f verläuft durch den Punkt $(0|-1)$ und ist eine nach oben offene Parabel. Somit hat jede Funktion f genau eine positive und eine negative Nullstelle. Diese Werte entsprechen genau den Lösungen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$.

oder:

Es gilt: $\frac{p^2}{4} + 1 > \frac{p^2}{4}$ und somit auch $\sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} > \frac{p}{2}$.

Daraus folgt: $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} > 0$ und $-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} < 0 \Rightarrow$ Es gibt immer genau eine positive und eine negative Lösung in $\mathbb{R}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte rechnerische Begründung.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür, dass die Parabel genau eine positive und eine negative Nullstelle hat.

c) Lösungserwartung:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2 + p \cdot x + p - \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{px^2}{2} + px - \frac{x}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = -6 \;\Rightarrow\; p = -3$$

Für $p = -3$ ergibt die gegebene Gleichung keine wahre Aussage, weil für eine solche Funktion der Graph der Funktion f achsensymmetrisch liegen müsste, damit die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, und das ist nur für $p = 0$ der Fall.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für den korrekten Wert von p.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die korrekte Angabe, ob die Aussage zutrifft, und eine korrekte Begründung.
  Andere korrekte Begründungen, zum Beispiel durch Rechnung, sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 2

Design-Center Linz

a) Lösungserwartung:

$f(x) = -\frac{13}{1\,296} \cdot x^2 + 13$

oder:

$f(x) \approx -0{,}01 \cdot x^2 + 13$

Durch den angegebenen Term wird das (umbaute) Volumen des Design-Centers berechnet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für das Aufstellen einer korrekten Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung.

b) Lösungserwartung:

2003 würden die Baukosten für das Design-Center ca. € 93,1 Mio. betragen.

Korrekte Vorgehensweise:
$K \cdot 1{,}032 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}019 \cdot 1{,}011 = K \cdot a^5 \Rightarrow$
$a = \sqrt[5]{1{,}032 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}019 \cdot 1{,}011} \Rightarrow a \approx 1{,}02118$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Berechnung.
  Toleranzintervall: [€ 93 Mio.; € 94 Mio.]
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Vorgehensweise. Die numerische Berechnung des Wertes muss dabei nicht erfolgen.

Aufgabe 3

Schiefer Turm von Pisa

a) Lösungserwartung:

Zeit-Weg-Funktion $h(t) = 45 - 5t^2$
$0 = 45 - 5t^2$
$t_1 = 3$
Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = h'(t) = -10t$
$v(3) = h'(3) = -30$
Der Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Aufpralls beträgt 30 m/s.

Die Geschwindigkeitsfunktion ist eine lineare Funktion, die im Intervall [0 s; 3 s] von $v(0) = h'(0) = 0$ ausgehend monoton fallend ist – daher wird der Betrag der Geschwindigkeit immer größer.

oder:

Die Bewegung ist gleichmäßig beschleunigt – das heißt, der Betrag der Geschwindigkeit ist monoton wachsend.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss und auch –30 m/s als korrekt zu werten ist.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

b) Lösungserwartung:

Die Steigung der Sekante beträgt –15.
Das bedeutet, dass der Betrag der Durchschnittsgeschwindigkeit bei der Bewegung des Körpers im Zeitraum von 0 Sekunden bis 3 Sekunden 15 m/s beträgt.

Mögliche Interpretation:
Der Betrag der Momentangeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 1{,}5$ gleich groß wie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Körpers im Intervall [0 s; 3 s].

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Bestimmung der Sekantensteigung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Aufgabe 4

Reaktionstest

a) Lösungserwartung:

$\overline{t} = 25$ s
$s_t \approx 4{,}9$ s

Mögliche Angaben der Werte für t_{11} und t_{12}:

$t_{11} = 23$ s, $t_{12} = 27$ s

oder:

$t_{11} = 24$ s, $t_{12} = 26$ s

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die korrekten Werte von $\overline{t}$ und s_t, wobei die Einheit nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall für s_t: [4,6 s; 5,0 s]
– Ein Punkt für eine geeignete Angabe von je einem Wert für t_{11} und t_{12}, wobei die Einheit „s" nicht angeführt sein muss und wobei allgemein gilt: Eine der beiden Zeiten muss den Wert $25 + x$, die andere den Wert $25 - x$ annehmen, wobei $x \in [0; s_t)$. Der Punkt ist auch dann zu geben, wenn die Werte für t_{11} und t_{12} auf der Basis falsch berechneter Werte von $\overline{t}$ bzw. s_t ermittelt werden, der Lösungsweg aber prinzipiell korrekt ist.

b) Lösungserwartung:

Mögliches Argument:
Durch die beiden „Ausreißer" 32,8 und 35,4 wird das arithmetische Mittel stark nach oben verzerrt. Das alternative Zentralmaß *Median* ist gegenüber Ausreißern robust.

Die Aussage ist so nicht korrekt, da aus dem Kastenschaubild nicht hervorgeht, ob es mehrere Reaktionszeiten gibt, die genau 22,4 s betragen und die im zweiten Viertel der geordneten Datenreihe liegen.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für ein richtiges Argument und die Angabe des Medians als alternatives Zentralmaß.
– Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

c) Lösungserwartung:

Damit die Zufallsvariable H als binomialverteilt angesehen werden kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Reaktion muss für alle 20 Reaktionen gleich hoch sein (darf also bei bestimmten Bildern nicht höher oder niedriger sein als bei anderen Bildern).
2. Die Reaktionen müssen voneinander unabhängig sein. (Ob eine vorangegangene Reaktion richtig oder falsch war, darf keinen Einfluss auf die Richtigkeit einer nachfolgenden Reaktion haben.)
3. Die Reaktionen können nur entweder fehlerhaft oder korrekt sein.

oder:

Jeder einzelne Versuch wird unter denselben Bedingungen durchgeführt.

$P(H > 2) = 1 - [P(H = 0) + P(H = 1) + P(H = 2)] \approx 0{,}595$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die (sinngemäß) richtige Angabe erforderlicher kontextbezogener Voraussetzungen für die Verwendung der Binomialverteilung, wobei der 3. Punkt nicht angeführt sein muss.
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (z. B. in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,59; 0,61]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 5

Überraschungseier

a) Lösungserwartung:

$h = 0{,}03$

$0{,}03 \pm 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}03 \cdot (1 - 0{,}03)}{500}} \approx 0{,}03 \pm 0{,}013 \;\Rightarrow\; [0{,}017; 0{,}043]$

Mögliche Maßnahme:
Durch eine Erhöhung der Anzahl der kontrollierten Schokoladeneier auf mehr als 500 kann eine Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls erreicht werden.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,017; 0,02]
Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,042; 0,05]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe der entsprechenden Änderung. Andere angeführte korrekte Maßnahmen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

$O'(r) = 4r\pi - 72 \cdot r^{-2} = 4r\pi - \frac{72}{r^2}$

$4r\pi - \frac{72}{r^2} = 0$

$r^3 = \frac{18}{\pi}$

$r = \sqrt[3]{\frac{18}{\pi}} \;\Rightarrow\; r \approx 1{,}79 \text{ cm}$

$O(1{,}79) \approx 60{,}4 \text{ cm}^2$

$O''(r) = 4\pi + 144 \cdot r^{-3} = 4\pi + \frac{144}{r^3}$

$O''(1{,}79) \approx 37{,}7 > 0$, daher liegt ein lokales Minimum vor.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Berechnung der minimalen Oberfläche, wobei die Einheit „cm^2" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [60 cm^2; 61 cm^2]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für einen korrekten Nachweis. Andere angeführte korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 1

Die Bedeutung der Parameter in der Funktionsgleichung einer Polynomfunktion

a) Lösungserwartung:

$7 = (-1)^2 + b \cdot (-1) + 16 \;\Rightarrow\; -10 = -b$
$b = 10$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 10 = 8$

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die korrekte Angabe des Parameters b.
– Ein Punkt für die korrekte Angabe der Steigung der Funktion f an der Stelle $x = -1$.

b) Lösungserwartung:

$f'(x) = 2 \cdot x + b \;\Rightarrow\; 2 \cdot x_E + b = 0$

oder:

$x_E = -\frac{b}{2}$

$f\left(-\frac{b}{2}\right) = -9 \;\Rightarrow\; \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + 16 = -9$

$\Rightarrow\; b = \pm 10$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen x_E und b.
– Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte für b.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Bestimmung der Tiefpunkte:

- Tiefpunkt des Graphen von f liegt auf der x-Achse $\Rightarrow$ Die Funktion f besitzt genau eine reelle Nullstelle. $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; {}_1x_2 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 16}$
  $\Rightarrow\; \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 16 = 0 \;\Rightarrow\; b_1 = -8 \quad b_2 = 8$
  $\Rightarrow\; x_1 = 4 \quad x_2 = -4 \;\Rightarrow\; T_1 = (4|0),\ T_2 = (-4|0)$
- Tiefpunkt des Graphen von f liegt auf der senkrechten Achse
  $\Rightarrow\; b = 0 \;\Rightarrow\; T_3 = (0|16)$

$g(x) = a \cdot x^2 + c$
$g(0) = 16 \quad c = 16$
$g(4) = 0 \;\Rightarrow\; 16 \cdot a + 16 = 0 \;\Rightarrow\; a = -1 \;\Rightarrow\; g(x) = -x^2 + 16$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe aller drei Tiefpunkte.
– Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Funktionsgleichung der Funktion g. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

d) Lösungserwartung:

$f(2) = 2^2 + 2 \cdot b + 16 = 2 \cdot b + 20$

Die Lage der Tangente ergibt sich aus $f(2) = f'(2) \cdot 2 + d$.
Daraus folgt: $2 \cdot b + 20 = (4 + b) \cdot 2 + d$ und daraus $d = 12$, daher ist die Lage des Punktes R unabhängig von b.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die korrekte Angabe des Funktionswertes $f(2)$ in Abhängigkeit von b.
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

Aufgabe 2

Mehrkampf

a) Lösungserwartung:

$P = 12{,}91 \cdot (70{,}24 - 4)^{1{,}1} \approx 1\,300{,}64$

Eine mögliche Interpretation von b:
b beschreibt die (Mindest-)Leistung (Wurfweite), die übertroffen werden muss, um Punkte zu erhalten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [1300; 1301]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Andere korrekte Interpretationen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

$P(M) = 1{,}84523 \cdot (M - 75)^{1{,}348}$
$P'(M) = 2{,}48737004 \cdot (M - 75)^{0{,}348}$
$P'(209) \approx 13{,}68$

Der Wert der Steigung dieser Tangente gibt näherungsweise an, um wie viel sich die Punktezahl bei dieser Leistung pro Zentimeter Sprunghöhenänderung verändert.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [13; 14]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Andere korrekte Interpretationen sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) **Lösungserwartung:**

$P_{1,\,\text{linear}}(M) = -235{,}21 \cdot M + 3\,473{,}97$

$P_{1,\,\text{linear}}(M) = 0 \;\Rightarrow\; M \approx 14{,}77$

Um Punkte zu erhalten, dürfte die Laufzeit maximal 14,77 s betragen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für k: [–236; –235]
  Toleranzintervall für d: [3 473; 3 474]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit nicht angegeben werden muss.
  Toleranzintervall: [14,7 s; 15 s]

d) **Lösungserwartung:**

mittlere Änderungsrate zwischen $M = 100$ und $M = 150$: –15,14 Punkte pro Sekunde
mittlere Änderungsrate zwischen $M = 150$ und $M = 200$: –9,82 Punkte pro Sekunde

Da die Funktion linksgekrümmt ist, sind die Änderungsraten bei kürzeren Laufzeiten (betragsmäßig) größer als bei längeren Laufzeiten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Werte.
  Toleranzintervalle: [–16; –14] und [–10; –9]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Lorenz-Kurve

a) Lösungserwartung:

$100 - f(80) = 38{,}816$

Es entfallen ca. 38,8 % des Gesamteinkommens auf die reichsten 20 % der Haushalte.

$f(x) = 4 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-1} \cdot x$
$f'(x) = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot x + 4 \cdot 10^{-1}$
$f''(x) = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-3}$

Die Funktion f ist linksgekrümmt, weil: $f''(x) = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-3} > 0$ für alle $x \in [0; 100]$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervalle: [38 %; 39 %] bzw. [0,38; 0,39]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

b) Lösungserwartung:

$A_1 = \int_0^{100} f(x)\,\mathrm{d}x = 3\,466{,}\overline{6}$

$A_2 = \frac{100 \cdot 100}{2} = 5\,000$

$\frac{A_2 - A_1}{A_2} = \frac{1\,533{,}\overline{3}}{5\,000} = 0{,}30\overline{6} \approx 0{,}31$

Der Gini-Koeffizient für das Land mit der Lorenz-Kurve f beträgt 0,31.

$\frac{0}{5\,000} = 0$

Der Wert des Gini-Koeffizienten für einen Staat, in dem alle Haushalte gleich viel verdienen, beträgt 0.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,30; 0,31]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 4

FSME-Impfung

a) Lösungserwartung:

$0{,}05 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}0045$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,45 %.

In einem Risikogebiet ist schlimmstenfalls jede zwanzigste Zecke mit FSME infiziert, d. h., der Anteil infizierter Zecken ist bis zu 1 000-mal höher als in einem Nichtrisikogebiet.
Daher ändert sich die berechnete Wahrscheinlichkeit für eine FSME-Erkrankung um den Faktor $\frac{1}{1\,000}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervalle: [0,4 %; 0,5 %] bzw. [0,004; 0,005]
- Ein Punkt für die richtige Lösung sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Bei einer entsprechenden (sinngemäß) korrekten Begründung ist der Faktor 1 000 ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

Da im Durchschnitt 1 % der Erkrankungen tödlich verlaufen, war nur ein Todesfall (1 % von 113) zu erwarten. Vier Todesfälle sind daher mehr, als zu erwarten war.

Mögliche Berechnung:
$n = 400$, $h = 0{,}16$
$2 \cdot \phi(z) - 1 = 0{,}95 \;\Rightarrow\; z = 1{,}96$

$$h \pm z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} = 0{,}16 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}16 \cdot (1-0{,}16)}{400}} \approx 0{,}16 \pm 0{,}036 \;\Rightarrow\; [0{,}124;\, 0{,}196]$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Antwort sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,12; 0,13]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,19; 0,2]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 1

200-m-Lauf

a) Lösungserwartung:

$s''(t) = -\frac{7}{75} \cdot t + 1{,}4$

$s'''(t) = -\frac{7}{75}$

$s''(t) = 0 \iff t = 15$

$s'''(15) = -\frac{7}{75} \neq 0$

Mögliche Interpretationen:

Nach ca. 15 Sekunden erreicht die Läuferin ihre Höchstgeschwindigkeit.

oder:

Bis zum Zeitpunkt t = 15 Sekunden nimmt die Geschwindigkeit der Läuferin zu.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei der Nachweis, dass bei t = 15 eine Wendestelle vorliegt (z. B. durch $s'''(15) \neq 0$), nicht angeführt werden muss.
  Toleranzintervall für t: [14; 16]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

b) Lösungserwartung:

$\frac{200}{26{,}04} \approx 7{,}68$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt ca. 7,68 m/s.

Es gibt mindestens einen Zeitpunkt, für den die Momentangeschwindigkeit der Läuferin gleich der mittleren Geschwindigkeit für die gesamte Laufstrecke ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit nicht angeführt werden muss.
  Toleranzintervall: [7,6; 7,7]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Aufgabe 2

Altersbestimmung

a) **Lösungserwartung:**

$$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} \approx 5\,728$$

Die Halbwertszeit von ^{14}C beträgt ca. 5 728 Jahre.

Mögliche Überprüfungen:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0{,}00098 < \frac{1}{1\,000}$$

oder:

$$N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 5728 \cdot 10} \approx 0{,}00098 \cdot N_0 < \frac{N_0}{1\,000}$$

Das bedeutet, dass die Nachweisgrenze von ^{14}C nach 10 Halbwertszeiten unterschritten ist.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit *Jahre* nicht angeführt werden muss.
  Toleranzintervall: [5 727; 5 730]
– Ein Punkt für einen korrekten Nachweis. Jeder korrekte Nachweis, der zeigt, dass nach 10 Halbwertszeiten die Nachweisgrenze von ^{14}C unterschritten ist, ist ebenfalls als richtig zu werten.

b) **Lösungserwartung:**

$$0{,}535 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{\ln(0{,}535)}{-\lambda} \approx 5\,169$$

$$0{,}525 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{\ln(0{,}525)}{-\lambda} \approx 5\,325$$

Das Alter der Mumie (in Jahren) lag zum Zeitpunkt ihres Auffindens im Intervall [5 169; 5 325].

Für große Werte von t wird der Graph der Funktion N flacher, d. h., einem Intervall konstanter Länge auf der $N(t)$-Achse entspricht ein größeres Intervall auf der t-Achse.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für ein korrektes Intervall.
  Toleranzintervall für t_1: [5 164; 5 174]
  Toleranzintervall für t_2: [5 320; 5 330]
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Interpretationen:

$N'(t)$ beschreibt die (momentane) Zerfallsgeschwindigkeit von ^{14}C zum Zeitpunkt t.

oder:

$N'(t)$ beschreibt die (momentane) Änderungsrate (Abnahmerate) der Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt t.

$N(t + 1) - N(t) = -p \cdot N(t)$	☒

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.
- Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Differenzengleichung angekreuzt ist.

Aufgabe 3

Blutgruppen

a) Lösungserwartung:

Blutgruppen: A und AB

Die Aussage ist nicht richtig, weil die Anzahl der Einwohner/innen in den beiden genannten Ländern nicht gleich groß ist.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die ausschließliche Angabe der beiden Blutgruppen A und AB.
– Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage nicht richtig ist, und eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür.

b) Lösungserwartung:

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 48 %.

Mögliche Berechnung:
$n = 100$, $p = 0{,}15 \;\Rightarrow\; \mu = 15$
$2 \cdot \phi(z) - 1 = 0{,}9 \;\Rightarrow\; z = 1{,}645$

$\mu \pm z \cdot \sigma = 15 \pm 1{,}645 \cdot \sqrt{100 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} \approx 15 \pm 6 \;\Rightarrow\; [9; 21]$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für ein korrektes Intervall.
Toleranzintervall für den unteren Wert: [9; 10]
Toleranzintervall für den oberen Wert: [20; 21]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:
$n = 150,\ h = 0{,}48$
$2 \cdot \phi(z) - 1 = 0{,}95 \ \Rightarrow\ z = 1{,}96$

$$h \pm z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} = 0{,}48 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}48 \cdot (1-0{,}48)}{150}} \approx 0{,}48 \pm 0{,}08 \ \Rightarrow\ [40\ \%; 56\ \%]$$

Bei gleichem Stichprobenergebnis führen eine größere Stichprobe und/oder ein geringeres Konfidenzniveau zu einer Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [39 %; 43 %]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [53 %; 57 %]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe der entsprechenden Änderungen beider Parameter.

d) Lösungserwartung:

$0{,}75^2 + 0{,}25^2 = 0{,}625$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder die gleiche Blutgruppe haben, beträgt 62,5 %.

Der Vater kann nicht Blutgruppe AB haben, denn sobald ein Elternteil Blutgruppe AB hat, hat das Kind laut Tabelle nie Blutgruppe 0.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozenten) sind ebenfalls als richtig zu werten. Toleranzintervall: [0,62; 0,63].
- Ein Punkt für die richtige Antwort und eine (sinngemäß) korrekte Begründung, warum (nur) Blutgruppe AB auszuschließen ist.

Aufgabe 4

Füllen eines Gefäßes

a) Lösungserwartung:

$a(h) = k \cdot h + d$
$a(0) = d = 10$
$a(20) = 20 \cdot k + 10 = 16 \;\Rightarrow\; k = 0{,}3$
$a(h) = 0{,}3 \cdot h + 10$

Das Integral gibt das Volumen der enthaltenen Flüssigkeit (in ml) an, wenn das Gefäß bis 5 cm unter dem Rand (bzw. bis zu einer Höhe von 15 cm) gefüllt ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind ebenfalls als richtig zu werten. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

b) Lösungserwartung:

Die momentane Änderungsrate der Wassermenge beträgt im gesamten Zeitintervall 80 Milliliter pro Sekunde.

$$\frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1} = 80$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) Lösungserwartung:

$2\,500 = \int_0^x (3{,}6 \cdot h + 120)\,\mathrm{d}h = 1{,}8x^2 + 120x$

$1{,}8x^2 + 120x - 2\,500 = 0$

$x_1 \approx 16{,}7$, $(x_2 < 0)$

Das Wasser steht ca. 16,7 cm hoch.

3,6 gibt diejenige Fläche in cm² an, um die die Querschnittsfläche mit jedem zusätzlichen cm Höhe zunimmt.

oder:

3,6 ist die Steigung der Funktion, die den Inhalt der Querschnittsfläche in der Höhe *h* angibt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei weder die negative Lösung der quadratischen Gleichung noch die Einheit *cm* angeführt werden müssen.
  Toleranzintervall: [16,5; 17]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Aufgabe 1

Krippenstein / *five fingers*

a) Lösungserwartung:

$\tan(\alpha) = \frac{750}{2\,160} \Rightarrow \alpha \approx 19{,}15°$ bzw. $\alpha \approx 0{,}3342$ rad

$S' = (750\,|\,1\,350)$

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die korrekte Berechnung.
  Lösungsintervall: [19°; 19,2°] bzw. [0,33 rad; 0,335 rad].
– Ein Punkt für die korrekte Berechnung.

b) Lösungserwartung:

$\frac{p(1\,350) - p(2\,100)}{p(1\,350)} \approx 0{,}085 = 8{,}5\ \%$

Die prozentuelle Druckabnahme pro Höhenmeter ist konstant.	☒
Der zur Funktion *p* gehörige Graph ist streng monoton fallend.	☒
Der zur Funktion *p* gehörige Graph nähert sich asymptotisch der waagrechten Achse.	☒

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Berechnung. Lösungsintervall: [0,084; 0,085] bzw. [8,4 %; 8,5 %]. Lösungen aus dem Intervall [–0,085; –0,084] bzw. [–8,5 %; –8,4 %] sind ebenso als richtig zu werten.
– Multiple-Choice-Aufgabe: Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Aufgabe 2

CO_2-Gehalt der Atmosphäre

a) **Lösungserwartung:**

$$K(t) = 310 \cdot \left(\sqrt[30]{\frac{350}{310}}\right)^t$$

oder:

$$K(t) = 310 \cdot 1{,}004^t$$

Die CO_2-Konzentration steigt im beobachteten Zeitraum um ca. 0,4 % pro Jahr.	☒
Für das Jahr 2010 werden nach diesem Wachstumsgesetz ca. 395 ppm prognostiziert.	☒

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für das korrekte Aufstellen von $K(t)$. Toleranzintervall für a: [1,004; 1,0041].
– Multiple-Choice-Aufgabe: Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

b) **Lösungserwartung:**

1800: 280 ppm
1900: 300 ppm

$K(t) = k \cdot t + d$
$300 = k \cdot 100 + 280 \Rightarrow k = 0{,}2$

$K(t) = 0{,}2 \cdot t + 280$

$K(210) = 322 \text{ ppm} \neq 390 \text{ ppm}$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für das korrekte Aufstellen von $K(t)$.
– Ein Punkt für einen korrekten Nachweis.

c) Lösungserwartung:

Der Ausdruck besagt, dass im angegebenen Zeitraum der Sauerstoffgehalt um 0,4 Prozentpunkte pro 1 Million Jahre abnimmt.

In den letzten 1 000 Mio. Jahren war der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre meistens niedriger als heute.	☒
In den letzten 600 Mio. Jahren ist der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre nie unter 5 Volumsprozent gefallen.	☒
Vor 200 Mio. Jahren war der Sauerstoffgehalt der Atmosphäre etwa so groß wie heute.	☒

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
- Multiple-Choice-Aufgabe: Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich alle laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

d) Lösungserwartung:

$y'(t) = 0{,}000384t^2 + 0{,}02688t + 0{,}2304$
$y''(t) = 0{,}000768t + 0{,}02688$

$y'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = -60,\ t_2 = -10$
$y''(-10) > 0 \Rightarrow$ Minimum
$y''(-60) < 0 \Rightarrow$ Maximum bei –60 Mio. Jahren
Vor 60 Millionen Jahren ist ein lokales Maximum des Sauerstoffgehaltes aufgetreten.

Alternative Möglichkeiten des Maximumnachweises:

Es wird nachgewiesen, dass die Ableitungsfunktion $y'(x)$ links vom lokalen Maximum positiv ist und dass sie rechts vom lokalen Maximum negativ ist.

oder:

Es wird nachgewiesen, dass gilt: $y(-60 - a) < y(-60)$ und $y(-60 + a) < y(-60)$ für eine reelle Zahl a.

oder:

Es wird argumentiert, dass bei einer Polynomfunktion dritten Grades mit positiven Koeffizienten die kleinere Nullstelle der ersten Ableitung eine lokale Maximumstelle ist.

oder:

Weil $y(-60) > y(-10)$ und y ein Polynom 3. Grades ist, muss das lokale Maximum bei $t = -60$ liegen.

oder:

Es gilt: $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = -\infty;\ \lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \infty;\ y(-60) \approx 6{,}91;\ y(-10) \approx -1{,}09.$
Deshalb ist bei $t = -60$ ein lokales Maximum des Sauerstoffgehaltes.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die korrekte Berechnung der Jahreszahl (es genügt, als Lösung –60 Mio. Jahre anzugeben).
– Ein Punkt für einen (sinngemäß) korrekten Nachweis.

Aufgabe 3

Verkehrsunfälle

a) Lösungserwartung:

Die größte absolute Abnahme fand im Zeitintervall von 1971 bis 1981 statt (–884), die größte relative Abnahme war in den Jahren von 2001 bis 2011 (–0,454 bzw. –45,4 %).

Da für die Berechnung der relativen Abnahme einer Größe auch der Bezugswert entscheidend ist, müssen größte absolute Abnahme und größte relative Abnahme einer Größe oder eines Prozesses nicht im gleichen Zeitintervall stattfinden.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt wird für die korrekten Zeitintervalle und die richtigen Abnahmewerte vergeben. Toleranzintervall für relative Abnahme: [–0,46; –0,45] bzw. [–46 %; –45 %]; die Vorzeichen müssen nicht angegeben sein.
– Ein Punkt wird für eine (sinngemäß) richtige verbale Begründung vergeben. Dabei kann die Begründung auch anhand konkreter Zahlen erfolgen.

b) Lösungserwartung:

$f(t) = -0{,}065t + 3{,}7$

Diese Funktion kann höchstens 57 Jahre, also bis zum Beginn des Jahres 2028, zur Modellbildung herangezogen werden.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt wird für die Angabe eines korrekten Funktionsterms vergeben. (Der Punkt kann auch vergeben werden, wenn eine andere Variable als t verwendet wird.)
Toleranzintervall für die ersten Parameter: [–0,08; –0,05].
– Ein Punkt wird für die Angabe der entsprechenden Zeitspanne und/oder des entsprechenden Jahres vergeben. Toleranzintervalle: [51 Jahre; 70 Jahre], [2022; 2042].

c) Lösungserwartung:

Die Anzahl der Unfälle mit Personenschäden nahm durchschnittlich um 607,3 pro Jahr ab.

Anzahl der Unfälle mit Personenschaden pro tausend KFZ:

- 1961: 30 (berechneter Wert liegt bei ≈ 29,9)
- 1971: 23 (berechneter Wert liegt bei ≈ 22,5)

Bezogen auf die Anzahl der zugelassenen KFZ hat die Anzahl der Unfälle mit Personenschaden also tatsächlich abgenommen.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt wird für die korrekte Angabe der durchschnittlichen jährlichen Abnahme vergeben. Toleranzintervall: [600; 610].
– Ein Punkt wird für das Heranziehen des entsprechenden Datenmaterials und eine korrekte Berechnung vergeben. Die Aussage kann auch anhand der relativen Werte präzisiert werden.

d) Lösungserwartung:

Verkehrsart	Anzahl der Verletzten	Anzahl der Getöteten	Summe
einspuriges KFZ	8 605	85	8 690
PKW	24 853	290	25 143
sonstige	11 567	148	11 715
Summe	45 025	523	45 548

$\frac{(85 + 290)}{45\,548} \approx 0{,}008$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,8 %.

Die Wahrscheinlichkeit, den Unfall zu überleben, wenn man mit einem PKW verunglückt, beträgt 99 %.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt wird für die richtige Angabe der Wahrscheinlichkeit vergeben. Toleranzintervall: [0,008; 0,0083] bzw. [0,8 %; 0,83 %].
– Ein Punkt wird für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation vergeben.

Aufgabe 4

Atmung

a) Lösungserwartung:

Die Periodenlänge beträgt 4 Sekunden.

Die Periodenlänge gibt die Zeitdauer eines Atemzyklus (= einmal Einatmen und einmal Ausatmen) an.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Ermittlung der Periodenlänge. Es genügt dabei die Angabe des gesuchten Wertes, eine Rechnung oder Zeichnung ist nicht erforderlich.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung der Periodenlänge. Zulässig sind auch andere sinngemäß richtige Antworten, die auf den Atemvorgang konkret Bezug nehmen. Ohne konkreten Bezug zum gegebenen Kontext ist die Antwort nicht als korrekt zu werten.

b) Lösungserwartung:

$$\int_0^2 L(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 0{,}6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\mathrm{d}t = \left(-0{,}6 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\right)\Big|_0^2 \approx 0{,}76$$

Durch das bestimmte Integral wird das gesamte Luftvolumen (in Litern) berechnet, das während des Einatmens (in den ersten beiden Sekunden) in die Lunge strömt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: [0,76; 0,80]. Die Einheit muss beim Ergebnis nicht zwingend angeführt werden.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Zulässig sind auch andere sinngemäß richtige Antworten, die auf den Atemvorgang konkret Bezug nehmen.

Aufgabe 1

Länderporträt Gambia

a) Lösungserwartung:

Ansatz: $2{,}2 = a \cdot b^t$, wobei der Wert für a aus dem Intervall [1,8; 1,85] und der Wert für b aus dem Intervall [1,025; 1,027] gewählt werden muss.
Das Ergebnis für t liegt demnach im Intervall [6,5; 8,2].

Für die Jahre 1990 bis 1993 lässt sich die Bevölkerungszahl am besten durch eine einzige Exponentialfunktion beschreiben, da die Prozentwerte des Bevölkerungswachstums annähernd konstant sind.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Berechnung.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Die Lösung muss inhaltlich der Lösungserwartung entsprechen. Alle Vierjahresintervalle zwischen 1989 und 1994 sind (im Hinblick auf die Ablesegenauigkeit) zulässig.

b) Lösungserwartung:

Ansatz: $\frac{a \cdot 1\,000\,000}{11\,000}$, wobei der Wert für a aus dem Intervall [1,8; 1,85] gewählt werden muss.
Das Ergebnis für die Bevölkerungsdichte liegt demnach im Intervall [163,6; 168,2].

Die Antwort auf die Frage, um wie viel Prozent die Bevölkerungsdichte in Gambia größer war als in Österreich, muss daher im Intervall [63 %; 70 %] liegen.

Der Faktor 0,2806 beschreibt die Bevölkerungszahl in Gambia im Jahr 1950 (in Mio. Einwohner/innen).

$$\frac{N(23) \cdot 1\,000\,000}{11\,000} \approx 50{,}86$$

Die Bevölkerungsdichte von Gambia für das Jahr 1973 liegt bei ca. 50,86 Einwohner/innen/km².

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Berechnung.
– Ein Punkt für eine korrekte Berechnung und (sinngemäß) korrekte Deutung der Bevölkerungsdichte von Gambia für das Jahr 1973. Lösungsintervall: [50; 51]. Die Interpretation des Faktors muss sinngemäß der Lösungserwartung entsprechen.

Aufgabe 2

Kosten und Erlös

a) Lösungserwartung:

$K(10) = 400$, $K(14) = 800$, $\frac{K(14) - K(10)}{14 - 10} = 100$

Der durchschnittliche Kostenanstieg beträgt im Intervall [10 ME; 14 ME] 100 GE/ME.
Kostendegression im Intervall: [0; 4).

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Berechnung des Differenzenquotienten.
– Ein Punkt für die Angabe des korrekten Intervalls (es sind sowohl offene, geschlossene als auch halboffene Intervalle zulässig).

b) Lösungserwartung:

Der Verkaufspreis beträgt 80 GE pro ME.

$E(x) = 80 \cdot x$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die korrekte Angabe des Verkaufspreises.
– Ein Punkt, wenn $E(x)$ richtig angegeben ist.

c) Lösungserwartung:

Die Kosten und der Erlös sind gleich hoch, daher wird kein Gewinn erzielt. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte geben die Gewinnschwellen an. Bei einer Menge x, die sich zwischen den beiden Gewinnschwellen befindet, macht das Unternehmen Gewinn.

$K(10) = 400$, $E(10) = 800$; das Unternehmen macht einen Gewinn von 400 GE.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine richtige Interpretation der Schnittpunkte und des Bereiches zwischen den Stellen der Schnittpunkte. Sinngemäß gleichwertige Aussagen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Gewinns.

Aufgabe 3

Bakterienkultur

a) Lösungserwartung:

①	
$3\ mm^2$	☒

②	
5 %	☒

Dem vorliegenden exponentiellen Wachstum bzgl. der Fläche der Bakterienkultur wird durch die Größe der Petrischale (ca. $2\,376\ mm^2$) eine Grenze gesetzt.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken ausschließlich der jeweils richtige Satzteil angekreuzt ist.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Beschreibung. Korrekt sind alle Antworten, die erläutern, dass kein unbeschränktes Wachstum innerhalb der Petrischale möglich ist.

b) Lösungserwartung:

Verdoppelungszeit: $t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} \approx 14{,}21$
Die Verdoppelungszeit beträgt ca. 14 Stunden.

Begründung:

Bei der Berechnung der Verdoppelungszeit t sieht man, dass das Ergebnis vom Anfangswert $A(0) = 3$ unabhängig ist (er fällt durch Gleichungsumformungen weg), z. B.:

$2 \cdot 3 = 3 \cdot 1{,}05^t \quad |:3$
$2 = 1{,}05^t$
$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)}$

oder

Wenn in jeder Stunde gleich viele Prozent dazukommen, dann dauert es immer – also unabhängig von der Anfangsmenge – gleich lang, bis 100 % dazugekommen sind.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Berechnung. Toleranzintervall: [14; 15].
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Auch andere Berechnungen mit einer Variablen (z. B.: a anstelle von 1,05, $A(0)$ anstelle von 3) oder selbst anderer Bezeichnung für $A(t)$ (z. B.: $N(t)$), die die Unabhängigkeit von t vom Anfangswert (hier $A(0)$) zeigen, gelten als richtig.

Aufgabe 4

Baumwachstum

a) Lösungserwartung:

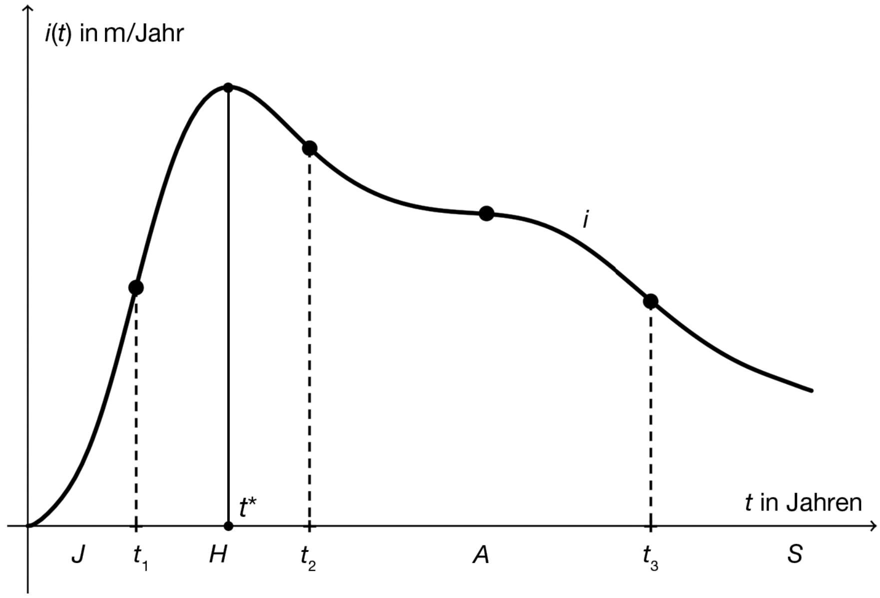
Im mittleren Bereich der Altersphase nimmt die Höhe des Baumes annähernd linear zu, weil der Höhenzuwachs pro Jahr annähernd konstant ist.

Höhe des Baumes am Beginn der Senilitätsphase: $\int_0^{t_3} i(t)\,\mathrm{d}t$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Nennung der Altersphase (bzw. die Markierung der betreffenden Stelle im Graphen) und die sinngemäß richtige Begründung, dass die Höhe des Baumes dann linear zunimmt, wenn i waagrecht verläuft, d. h. der Höhenzuwachs konstant ist.
– Ein Punkt für das richtige Anschreiben des Integrals (inkl. Grenzen und Integrationsvariable).

b) Lösungserwartung:



Zu diesem Zeitpunkt (t^*) ist die Wachstumsgeschwindigkeit des Baumes größer als zu den Zeitpunkten davor und danach.
Solange i monoton steigt (Jugendphase), wächst der Baum immer schneller, d. h., die Höhenzunahme pro Jahr wird größer. Wenn i monoton fällt (Altersphase), nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit ab, d. h., der Baum wächst immer langsamer.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Kennzeichnung der Maximumstelle und für eine sinngemäß richtige Interpretation dieses Zeitpunktes. Die Maximumstelle muss (auf der t-Achse!) erkennbar gekennzeichnet sein. Aus der formulierten Aussage muss klar hervorgehen, dass der Baum zu diesem Zeitpunkt am schnellsten wächst.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation des Monotonieverhaltens von i im Hinblick auf das Baumwachstum.

Aufgabe 5

Lottozahlen

a) Lösungserwartung:

Die Ziehung der Gewinnzahlen 3, 12, 19, 25, 36, 41 bei einer Lottoziehung ist gleich wahrscheinlich wie die Ziehung der Gewinnzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.	☒
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 17 als erste Zahl gezogen wird, beträgt bei jeder Ziehung $\frac{1}{45}$.	☒

Richtigstellung:

- Eine Zahl, die bei einer Lottoziehung gezogen wurde, wird bei der darauffolgenden Lottoziehung mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{45}$ erneut gezogen.
- Im Kalenderjahr 2010 war die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 8 zu ziehen, bei jeder Ziehung gleich $\frac{6}{45}$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 32 bei einer Ziehung als zweite Zahl gezogen wird, beträgt $\frac{1}{45}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Richtigstellung einer der drei falschen Aussagen.

b) Lösungserwartung:

Die relative Ziehungshäufigkeit der Zahl 10 im Kalenderjahr 2010 beträgt $\frac{19}{104} \approx 0{,}183$.

Bei 2 056 Ziehungen hat sich die relative Häufigkeit $\left(\frac{270}{2\,056} \approx 0{,}131\right)$ der theoretischen Ziehungswahrscheinlichkeit von $\frac{6}{45} \approx 0{,}133$ im Vergleich zu den 104 Ziehungen des Kalenderjahres 2010 angenähert.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für das korrekte Bestimmen der relativen Ziehungshäufigkeit, wobei das Ergebnis in Bruch-, Dezimal- oder Prozentschreibweise angegeben werden kann.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erklärung, warum die Häufigkeiten in den Abbildungen 1 und 2 mit dem empirischen Gesetz der großen Zahlen für die relative Ziehungshäufigkeit der Zahl 10 im Einklang stehen.

c) Lösungserwartung:

$\mu = 2\,056 \cdot \frac{6}{45} \approx 274 \qquad \sigma = \sqrt{2\,056 \cdot \frac{6}{45} \cdot \frac{39}{45}} \approx 15$

$\mu - 2\sigma \approx 243$
$\mu + 2\sigma \approx 305$

Bei allen Zahlen, die höchstens 243-mal oder mindestens 305-mal gezogen wurden, weicht die Ziehungshäufigkeit um mehr als 2σ vom Erwartungswert ab. Dies trifft auf die Zahlen 39, 42 und 43 zu.

Es wurde die Binomialverteilung verwendet, da es um Anzahlen geht („absolute Ziehungshäufigkeit"), es nur zwei mögliche Ausgänge bei einer Lottoziehung gibt (eine bestimmte Zahl wurde gezogen oder sie wurde nicht gezogen) und weil die Ziehungswahrscheinlichkeit von Ziehung zu Ziehung gleich bleibt.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für das Ermitteln der Zahlen 39, 42 und 43.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung, warum die Binomialverteilung verwendet werden darf.

Aufgabe 1

Hallenbad

a) Lösungserwartung:

Partei *A*: Das Hallenbad muss renoviert werden, da die Besucherzahlen über die letzten Jahre annähernd konstant geblieben sind.
Partei *B*: Das Hallenbad soll nicht renoviert werden, da die Besucherzahlen in den letzten Jahren stark abgenommen haben.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine richtige Aussage zu Partei *A*.
– Ein Punkt für eine richtige Aussage zu Partei *B*.
Zulässig sind auch andere Formulierungen, die den Kern der Aussagen treffen.

b) Lösungserwartung:

1) Die senkrechte Achse beginnt bei null, allerdings ist der erste Abschnitt bis zum ersten Skalierungswert verkürzt dargestellt.
2) Änderung/„Verfeinerung“ der Skalierung
3) Die *x*-Achsen-Skala beginnt mit 2002, daher fällt „der ansteigende Teil“ in der Graphik weg (vgl. Anstieg der Besucherzahlen lt. Partei *A*).

Lösungsschlüssel:

Zwei Punkte: je ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekt angeführte Manipulation.

c) Lösungserwartung:

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Besucher/innen pro Tag	**168,5**	**169,3**	**170,0**	**171,8**	**172,0**	**174,2**	**176,9**	**180,6**

Investitionen in das Hallenbad lohnen sich, denn in den letzten acht Jahren stieg die Zahl der täglichen Besucher/innen jedes Jahr an.

Lösungsschlüssel:

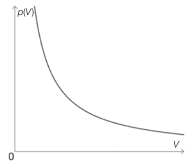
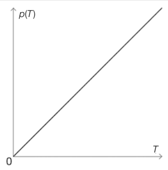
– Ein Ausgleichspunkt für die richtigen Werte in der Tabelle. Die Angabe einer Null nach dem Komma (z. B.: 170,0) kann entfallen.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Antwort.

Aufgabe 2

Zustandsgleichung idealer Gase

a) Lösungserwartung:

Volumen halbieren oder Temperatur verdoppeln.

	☒
	☒

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Möglichkeiten, die zu einer Verdoppelung des Drucks führen, wobei beide Möglichkeiten angegeben werden müssen.
- Ein Punkt für das ausschließliche Ankreuzen der beiden richtigen Graphen.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Begründungen:

Der Druck nimmt mit steigendem Volumen ab. Die Funktion ist streng monoton fallend.

$\left.\begin{array}{r} p(V_2) < p(V_1) \\ V_2 > V_1 \end{array}\right\}$ Daher ist der Quotient negativ.

$p'(V) = -\frac{n \cdot R \cdot T}{V^2}$ beschreibt die momentane Druckänderung.

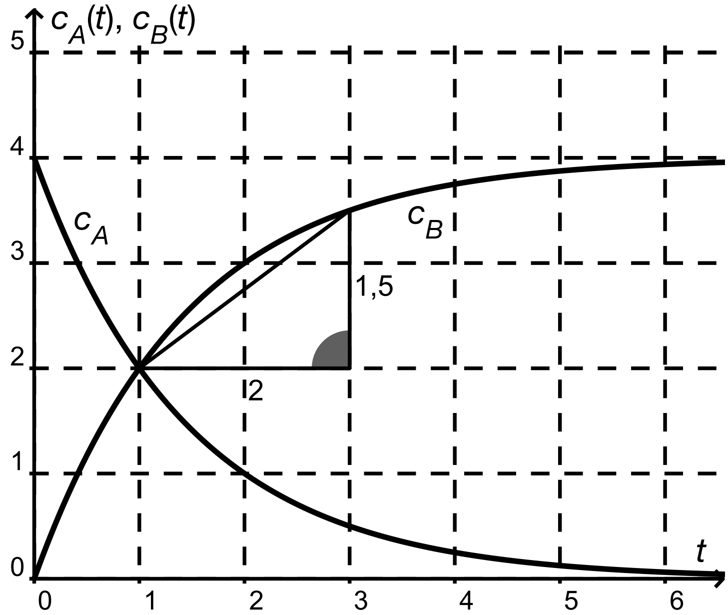
Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die Ermittlung der Funktionsgleichung für die Druckänderung. Die Schreibweise $p'(V)$ muss nicht verwendet werden. Wichtig ist, dass der Funktionsterm stimmt und eine funktionale Schreibweise verwendet wird.

Aufgabe 3

Chemische Reaktionsgeschwindigkeit

a) Lösungserwartung:



$\frac{1,5}{2} = 0,75 \, \frac{\text{Mol}}{\text{Liter} \cdot \text{Minute}}$

Mögliche Interpretationen:

Die Konzentration von *A* nimmt zu jedem Zeitpunkt gleich stark ab, wie die Konzentration von *B* zu diesem Zeitpunkt zunimmt.
Oder:
Die beiden Reaktionsgeschwindigkeiten sind zu jedem Zeitpunkt betragsmäßig gleich groß.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für das Ermitteln der durchschnittlichen Reaktionsgeschwindigkeit. Jedes Ergebnis, das im Intervall [0,7; 0,8] liegt, ist als richtig zu werten. Die Einheit muss nicht angegeben werden. Falls ein richtiges Ergebnis mit einer falschen Einheit angegeben ist, so ist die Aufgabe als richtig gelöst zu werten.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Deutung der momentanen Änderungsraten der Konzentrationen der Stoffe *A* und *B*.

b) Lösungserwartung:

c_0 ist die Anfangskonzentration des Stoffes zum Zeitpunkt $t = 0$.
Für den Ausgangsstoff *A* ist der Graph (bzw. die Funktion) streng monoton fallend, d. h., der Parameter k im Exponenten der Exponentialfunktion muss negativ sein.

Möglicher Ansatz:

$\frac{c_0}{2} = c_0 \cdot e^{k \cdot \tau}$

und/oder

$\frac{1}{2} = e^{k \cdot \tau}$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = k \cdot \tau$

$\tau = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{k}$ oder $\tau = \frac{-\ln(2)}{k}$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Deutung von c_0 und eine (sinngemäß) korrekte Argumentation, warum der Parameter k negativ ist.
– Ein Punkt für den richtigen Ansatz und das richtige Ergebnis für τ.
  Auch der Ansatz $\frac{c_0}{2} = c_0 \cdot e^{-k \cdot \tau}$ mit der Lösung $\tau = \frac{\ln(2)}{k}$ ist als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Grenzkosten

a) Lösungserwartung:

$$\overline{K}(x) = \frac{0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}09 \cdot x^2 + 2{,}8 \cdot x + 5}{x} = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}09 \cdot x + 2{,}8 + 5 \cdot x^{-1}$$

$\overline{K}(100) = 3{,}85$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die korrekte Stückkostenfunktion, wobei der Funktionsterm nicht vereinfacht werden muss.
- Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Funktionswertes (sollte die Stückkostenfunktion zwar im Ansatz richtig, aber in der Vereinfachung fehlerhaft berechnet worden sein, jedoch der Funktionswert dann korrekt berechnet worden sein, ist dieser Punkt zu geben).

b) Lösungserwartung:

Der Differenzenquotient $\frac{K(x+1) - K(x)}{(x+1) - x} = K(x+1) - K(x)$ bzw. die absolute Änderung $K(x+1) - K(x)$ wäre mathematisch korrekt (anstatt des Differenzialquotienten).
Für eine lineare Kostenfunktion ist die betriebswirtschaftliche Interpretation der Grenzkostenfunktion gleichzeitig auch mathematisch exakt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für das korrekte Änderungsmaß. Eine der beiden Möglichkeiten muss zumindest begrifflich angeführt sein. Die formale Definition des Differenzenquotienten kann gegebenenfalls nachgesehen werden.
  Anmerkung: Der betriebswirtschaftlich eigentlich genutzte Differenzialquotient gibt die momentane Änderungsrate an einer bestimmten Stelle an. Die betriebswirtschaftliche Interpretation bezieht sich aber auf eine Änderungsrate (= Kostenzuwachs) bei einer Produktionssteigerung um eine Gütereinheit – also eigentlich auf die Änderungsrate in einem Intervall $[x; x + 1]$, weswegen die Verwendung des Differenzenquotienten bzw. der absoluten Änderung mathematisch korrekt ist. (Geometrisch wird die Sekantensteigung durch die Tangentensteigung ersetzt.)
- Ein Punkt für die korrekte Angabe des Funktionstyps. (Auch graphische Überlegungen – ein Graph einer linearen Funktion – gelten als richtige Antwort.)

Aufgabe 5

Sportwagen

a) Lösungserwartung:

$a(t) = v'(t) = -1{,}5 \cdot t^2 + 7{,}5 \cdot t$
$a(2) = -1{,}5 \cdot 2^2 + 7{,}5 \cdot 2 = 9 \;\Rightarrow\; a(2) = 9\ \text{m/s}^2$

Auch die Berechnung über den Differenzenquotienten mit korrektem Grenzwertübergang ist zulässig.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt, wenn $a(t)$ als 1. Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion korrekt bestimmt wurde.
– Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Ergebnisses. Sollte $a(t)$ im Ansatz richtig (aber fehlerhaft) aufgestellt worden sein, die Berechnung aber in weiterer Folge korrekt sein, dann ist dieser Punkt zu geben.

b) Lösungserwartung:

$s(4) = \int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^4 (-0{,}5 \cdot t^3 + 3{,}75 \cdot t^2)\,\mathrm{d}t$
$s(4) = \int_0^4 (-0{,}5 \cdot t^3 + 3{,}75 \cdot t^2)\,\mathrm{d}t = (-0{,}125 \cdot t^4 + 1{,}25 \cdot t^3)\Big|_0^4 = 48 \;\Rightarrow\; s(4) = 48\ \text{m}$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt, wenn der Ansatz $s(4) = \int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t$ mit dem bestimmten Integral inklusive der richtigen Grenzen vorhanden ist.
– Ein Punkt für das richtige Ergebnis. Sollte das bestimmte Integral im Ansatz richtig (aber fehlerhaft) aufgestellt worden sein, die Berechnung aber in weiterer Folge korrekt sein, dann ist dieser Punkt zu geben.

c) Lösungserwartung:

Es liegt ein linearer funktionaler Zusammenhang vor.
$v_1(t) = \frac{28}{4} \cdot t + 0 = 7 \cdot t$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt, wenn erkannt wurde, dass ein linearer Zusammenhang vorliegt, und dieser angegeben wurde (entweder textlich oder auch in Form einer Funktionsgleichung). Dieser Punkt ist auch zu geben, wenn zwar ein linearer Zusammenhang erkannt wurde, aber die Funktionsgleichung falsch aufgestellt wurde.
– Ein Punkt, wenn die Funktionsgleichung mit den korrekten Parametern aufgestellt wurde.