Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

21. September 2015

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 3)

Korrekturheft

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im Erlass mit der Geschäftszahl BMBF-17.200/0166-II/2014 des Bundesministeriums für Bildung und Frauen.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A* (**KA**) umfasst die unabhängig[1] erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B* (**KB**) umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufe 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche" eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen" wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend" (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punkteermittlung soll die Arbeit der Kandidatin/des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag der Prüferin/des Prüfers zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

43–47 Punkte	Sehr gut
37–42 Punkte	Gut
31–36 Punkte	Befriedigend
21–30 Punkte	Genügend
0–20 Punkte	Nicht genügend

[1] Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur **ein möglicher** Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.

2. Der Lösungsschlüssel ist **verbindlich** anzuwenden unter Beachtung folgender Vorgangsweisen:

   a. Grundsätzlich sind Punkte nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung als vollständig erfüllt zu erkennen ist.

   b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.

   c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin / vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.

   d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin / vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.

   e. Werden von der Kandidatin / vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.

   f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin / des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.

   g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.

   h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.

   i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.

3. Sind Sie sich als Korrektor/in über die Punktevergabe nicht schlüssig, können Sie eine Korrekturanfrage an das BIFIE (via Telefon-Hotline oder Online-Helpdesk) stellen.

Aufgabe 1

Vergnügungspark

Möglicher Lösungsweg

a) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213\ldots$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

$\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m^2.

b) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Der Graph ist keine Gerade und keine Parabel. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c) rechtwinkeliges Dreieck FPS: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck FQS: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite b (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts (KA)
b) 1 × D: für eine richtige Argumentation (KA)
c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel (KA)

Aufgabe 2

Luftdruck – Höhenformel

Möglicher Lösungsweg

a) $p(0) = p_0 \cdot e^{-\frac{0}{7\,991}} = p_0 \cdot 1 = p_0$

$\frac{p_0}{2} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7\,991}}$

$h = 7\,991 \cdot \ln(2) = 5\,538{,}9\ldots$

Bei einer Seehöhe von rund 5 539 m beträgt der Luftdruck genau die Hälfte von p_0.

b) $f(h) = 1\,013 - \frac{1}{10} \cdot h$

c) Modellierung durch eine lineare Funktion g mit $g(x) = a \cdot x + b$:
$1\,040 = a \cdot 990 + b$
$930 = a \cdot 1\,980 + b$

$g(x) = -\frac{1}{9} \cdot x + 1\,150$

$g(1\,300) = \frac{9\,050}{9} \approx 1\,006$

Der Luftdruck in einer Höhe von 1 300 m über dem Meeresspiegel beträgt rund 1 006 hPa.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis (KA)
1 × A: für den richtigen Lösungsansatz zur Berechnung (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Seehöhe (KB)

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktion (KA)

c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke) (KA)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Luftdrucks (KB)

Aufgabe 3

Produktion von Rucksäcken

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnet, dass ein zufällig kontrollierter Rucksack Nahtfehler, aber keine der beiden anderen Fehlerarten aufweist.

b) $P(\text{„mindestens 1 Fehler“}) = 1 - P(\text{„kein Fehler“}) = 1 - 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 = 0{,}0589... \approx 5{,}9\ \%$

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehler aufweist, muss bei der Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit nur 1 Ereignis, nämlich das Ereignis, dass kein Fehler auftritt, betrachtet werden.
Bei einer direkten Berechnung müssten die Wahrscheinlichkeiten für eine Vielzahl von Ereignissen berechnet und addiert werden.

c) Berechnung mittels Binomialverteilung: $n = 100$ und $p = 0{,}03$
$P(X < 3) = 0{,}41977\ldots \approx 41{,}98\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Angabe des Ereignisses (es muss auch klar erkennbar sein, dass die beiden anderen Fehlerarten nicht auftreten) (KA)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
1 × D: für die richtige Erklärung zur Gegenwahrscheinlichkeit (KB)
c) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung) (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KB)

Aufgabe 4

Tennis

Möglicher Lösungsweg

a) Aufschlaggeschwindigkeit, die von (mindestens) 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde: 120 km/h

Quartilsabstand: 30 km/h

b) ähnliche Dreiecke:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots\text{ m} \approx 0{,}8\text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

c) $f'(0) = \frac{2}{5}$

$\arctan\left(\frac{2}{5}\right) = 21{,}801\ldots° \approx 21{,}80°$

Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Aufschlaggeschwindigkeit (KA)
1 × C2: für das richtige Ablesen des Quartilsabstands (KA)

b) 1 × D: für die richtige Überprüfung (KA)

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl $\frac{21}{50}$ (KA)

Aufgabe 5

Leistung einer Solaranlage

Möglicher Lösungsweg

a) $P'(6) = 0$

$0 = \frac{7}{162} \cdot 6^3 - \frac{7}{9} \cdot 6^2 + 2 \cdot a \cdot 6$

$a = \frac{14}{9}$

b) $\int_0^{12} (0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221)\,\mathrm{d}t = 67{,}5288$

Die Solaranlage liefert an diesem Tag rund 67,53 kWh Energie.

c) An der Wendestelle x_0 einer Funktion f gilt stets: $f''(x_0) = 0$.
Die 2. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine lineare Funktion, die genau 1 Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Daher hat die Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Koeffizienten *a* (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten *a* (KB)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Integrals (KA)
c) 1 × D: für eine richtige Begründung (KB)

Aufgabe 6 (Teil B)

Riesenräder

Möglicher Lösungsweg

a) Durchmesser: $d = 121$ m

Aus der Periodendauer $T = 30$ min ergibt sich:
$\omega = \frac{2\pi}{30}\text{ min}^{-1} \approx 0{,}21\text{ min}^{-1}$

Verschiebung nach oben: $c = 74{,}5$ m

b) $60 = 30{,}48 \cdot \sin(0{,}02464 \cdot t) + 34{,}27$

$t_1 = 40{,}78\ldots\text{ s} \approx 41\text{ s}$
$t_2 = 86{,}71\ldots\text{ s} \approx 87\text{ s}$

$t_2 - t_1 \approx 46\text{ s}$

Die Gondel erreicht nach etwa 41 Sekunden erstmals 60 Meter und befindet sich rund 46 Sekunden lang in einer Höhe von mindestens 60 Metern.

c) Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man für die Zeitdauer einer Umdrehung: $T = 120$ s.
Umfang des Kreises: $u = 30\pi$ m

$v = \frac{30\pi}{120}\text{ m/s} \approx 0{,}785\text{ m/s} \approx 2{,}827\text{ km/h}$

Da es 12 gleichmäßig verteilte Gondeln gibt, beträgt der Winkel zwischen je 2 benachbarten Gondeln 30°. φ wird gegen den Uhrzeigersinn von der „rechten horizontalen Lage“ aus gemessen. Der Winkel beträgt daher –30° bzw. 330°, im Bogenmaß also $-\frac{\pi}{6}$ bzw. $\frac{11\pi}{6}$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des Durchmessers (KA)
1 × B1: für die richtige Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit (KA)
1 × B2: für die richtige Ermittlung des Parameters c (KA)

b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung des Zeitpunkts (KA)
1 × B2: für die richtige Bestimmung der Zeitdauer (KB)

c) 1 × A: für eine richtige Modellbildung zur Berechnung der Geschwindigkeit (KB)
1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit in km/h (KB)
1 × C: für die richtige Dokumentation zur Ermittlung des Parameters φ
(auch eine Beschreibung mit einem Winkel in Grad ist als richtig zu werten) (KB)

Aufgabe 7 (Teil B)

Länge eines Werkstücks

Möglicher Lösungsweg

a) Die Parameter sind: $\mu_{\bar{X}} = 72{,}3$ mm und $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{7}}$ mm.

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:
$\mu \pm u_{0{,}975} \cdot \sigma_{\bar{X}}$
$u_{0{,}975} = 1{,}959\ldots$
Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mm: [71,9; 72,7].

Eine Halbierung der Breite erfordert die Vervierfachung des Stichprobenumfangs.

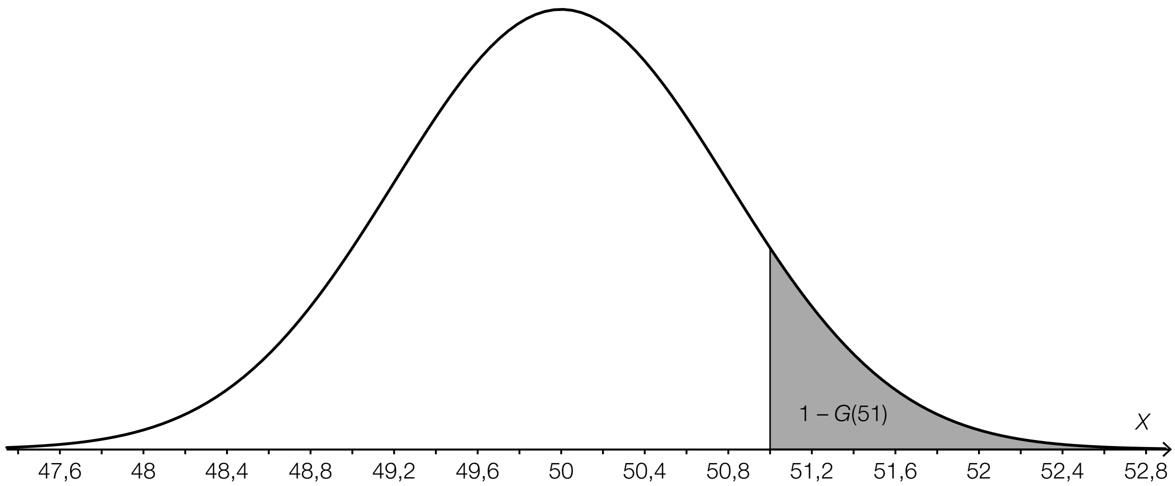
Die Standardabweichung der Stichprobe ist umso kleiner, je größer der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 7$ schmäler als für $n = 5$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 7$ größer sein als für $n = 5$.

b) $P(\text{„Werkstück wird aussortiert“}) = 1 - P(71{,}4 \leq X \leq 73{,}2) = 0{,}0718\ldots \approx 7{,}2\,\%$

$\sigma = \frac{x_{\text{ob}} - \mu}{u_{0{,}99}} = \frac{73{,}2 - 72{,}3}{2{,}326\ldots} = 0{,}38\ldots \approx 0{,}4$
Damit der Ausschussanteil 2 % beträgt, müsste die Standardabweichung rund 0,4 mm sein.

c) Der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion beträgt 1. Der Graph der Dichtefunktion ist symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts μ.

Daher gilt: $G(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$.



$\sigma = 0{,}8$ mm
Toleranzbereich: [0,6; 1,0]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige Angabe der Parameter (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreubereichs (KB)
1 × C: für eine richtige Beschreibung (KB)
1 × D: für eine richtige Begründung (KB)

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung (KB)

c) 1 × D: für eine richtige Begründung (KA)
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit als Fläche (KA)
1 × C: für das richtige Ablesen der Standardabweichung im Toleranzbereich [0,6; 1,0] (KA)

Aufgabe 8 (Teil B)

Wassergefäße

Möglicher Lösungsweg

a) Da der Punkt (0|0) auf dem Funktionsgraphen liegt, ist $c = 0$. Da der Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, muss $b = 0$ sein.

$$a \cdot 25^4 = 60 \;\Rightarrow\; a = \frac{12}{78\,125} = 0{,}0001536$$

b) Höhe des Gefäßes: $H = 0{,}0001421 \cdot 30^4 = 115{,}101$

$$V = \int_0^H \pi \cdot x^2 \,\mathrm{d}y = \int_0^H \pi \cdot \sqrt[2]{\frac{y}{0{,}0001421}} \,\mathrm{d}y = 216\,960{,}\ldots$$

$V \approx 216\,960 \text{ cm}^3 \approx 217$ Liter

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für die richtige Begründung, warum $c = 0$ ist (KA)
1 × D2: für die richtige Begründung, warum $b = 0$ ist (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten a (KA)

b) 1 × A1: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Volumens (KB)
1 × A2: für das richtige Angeben der Integralgrenzen (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Volumens in Litern (KB)