Name:	
Klasse:	

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

11. Mai 2015

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Sehr geehrte Kandidatin! Sehr geehrter Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft zu Teil 2 enthält vier Aufgaben mit je zwei bis vier Teilaufgaben, wobei alle Teilaufgaben unabhängig voneinander bearbeitbar sind. Ihnen stehen dafür insgesamt *150 Minuten* an reiner Arbeitszeit zur Verfügung.

Verwenden Sie einen nicht radierbaren, blau oder schwarz schreibenden Stift! Bei Konstruktionsaufgaben ist auch die Verwendung eines Bleistifts möglich.

Verwenden Sie zur Bearbeitung dieser Aufgaben dieses Aufgabenheft und die Ihnen zur Verfügung gestellten Blätter! Schreiben Sie Ihren Namen auf der ersten Seite des Aufgabenheftes in das dafür vorgesehene Feld und auf jedes verwendete Blatt! Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung an!

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Die Lösung muss dabei klar ersichtlich sein. Wenn die Lösung nicht klar ersichtlich ist oder verschiedene Lösungen angegeben sind, gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Streichen Sie Ihre Notizen durch.

Sie dürfen eine approbierte Formelsammlung sowie die gewohnten elektronischen Hilfsmittel verwenden.

Abzugeben sind das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Blätter.

Beurteilung

Jede Aufgabe in Teil 1 wird mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet, jede Teilaufgabe in Teil 2 mit 0, 1 oder 2 Punkten. Die mit $\boxed{\text{A}}$ gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet.

- Werden im Teil 1 mindestens 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
- Werden im Teil 1 weniger als 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, werden mit $\boxed{\text{A}}$ markierte Aufgabenstellungen aus Teil 2 zum Ausgleich (für den laut LBVO „wesentlichen Bereich") herangezogen.
  Werden unter Berücksichtigung der mit $\boxed{\text{A}}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 mindestens 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
  Werden auch unter Berücksichtigung der mit $\boxed{\text{A}}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 weniger als 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit mit „Nicht genügend" beurteilt.
- Werden im Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte $\boxed{\text{A}}$) erreicht, so gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

Genügend	16–23 Punkte
Befriedigend	24–32 Punkte
Gut	33–40 Punkte
Sehr gut	41–48 Punkte

Erläuterung der Antwortformate

Die Aufgaben haben einerseits ***freie Antwortformate***; dabei schreiben Sie Ihre Antwort direkt unter die jeweilige Aufgabenstellung in das Aufgabenheft oder auf die zur Verfügung gestellten Blätter. Weitere Antwortformate, die in der Klausur zum Einsatz kommen können, werden im Folgenden vorgestellt:

Zuordnungsformat: Dieses Antwortformat ist durch mehrere Aussagen (bzw. Tabellen oder Abbildungen) gekennzeichnet, denen mehrere Antwortmöglichkeiten gegenüberstehen. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Antwortmöglichkeiten durch Eintragen der **entsprechenden Buchstaben** den jeweils zutreffenden Aussagen zuordnen!

Beispiel:
Gegeben sind zwei Gleichungen.

Aufgabenstellung:
Ordnen Sie den zwei Gleichungen jeweils die entsprechende Bezeichnung (aus A bis D) zu!

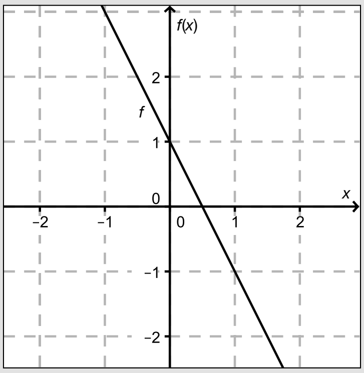
$1 + 1 = 2$	A
$2 \cdot 2 = 4$	C

A	Addition
B	Division
C	Multiplikation
D	Subtraktion

Konstruktionsformat: Eine Aufgabe und deren Aufgabenstellung sind vorgegeben. Die Aufgabe erfordert die Ergänzung von Punkten, Geraden und/oder Kurven im Aufgabenheft.

Beispiel:
Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$.

Aufgabenstellung:
Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion mit den Bedingungen $k = -2$ und $d > 0$ in das vorgegebene Koordinatensystem ein!



Multiple-Choice-Format in der Variante „1 aus 6“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und sechs Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine Antwortmöglichkeit** auszuwählen ist. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die einzige zutreffende Antwortmöglichkeit ankreuzen!

Beispiel:
Welche Gleichung ist korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an!

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 2	☐
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐
6 + 6 = 6	☐

Multiple-Choice-Format in der Variante „2 aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **zwei Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:
Welche Gleichungen sind korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐

Multiple-Choice-Format in der Variante „x aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine, zwei, drei, vier** ***oder*** **fünf Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. In der Aufgabenstellung finden Sie stets die Aufforderung „Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n)/Gleichung(en)/... an!“. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die zutreffende Antwortmöglichkeit/die zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:
Welche der gegebenen Gleichungen ist/sind korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Gleichung(en) an!

1 + 1 = 2	☒
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 6	☒
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 10	☒

Lückentext: Dieses Antwortformat ist durch einen Satz mit zwei Lücken gekennzeichnet, das heißt, im Aufgabentext sind zwei Stellen ausgewiesen, die ergänzt werden müssen. Für jede Lücke werden je drei Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Lücken durch Ankreuzen der **beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten** füllen!

Beispiel:
Gegeben sind 3 Gleichungen.

Aufgabenstellung:
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Gleichung ______①______ wird als Zusammenzählung oder ______②______ bezeichnet.

①	
1 – 1 = 0	☐
1 + 1 = 2	☒
1 · 1 = 1	☐

②	
Multiplikation	☐
Subtraktion	☐
Addition	☒

So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Hier wurde zuerst die Antwort „5 + 5 = 9“ gewählt und dann auf „2 + 2 = 4“ geändert.

So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Hier wurde zuerst die Antwort „2 + 2 = 4“ übermalt und dann wieder gewählt.

Wenn Sie jetzt noch Fragen haben, wenden Sie sich bitte an Ihre Lehrerin/Ihren Lehrer!

Viel Erfolg bei der Bearbeitung!

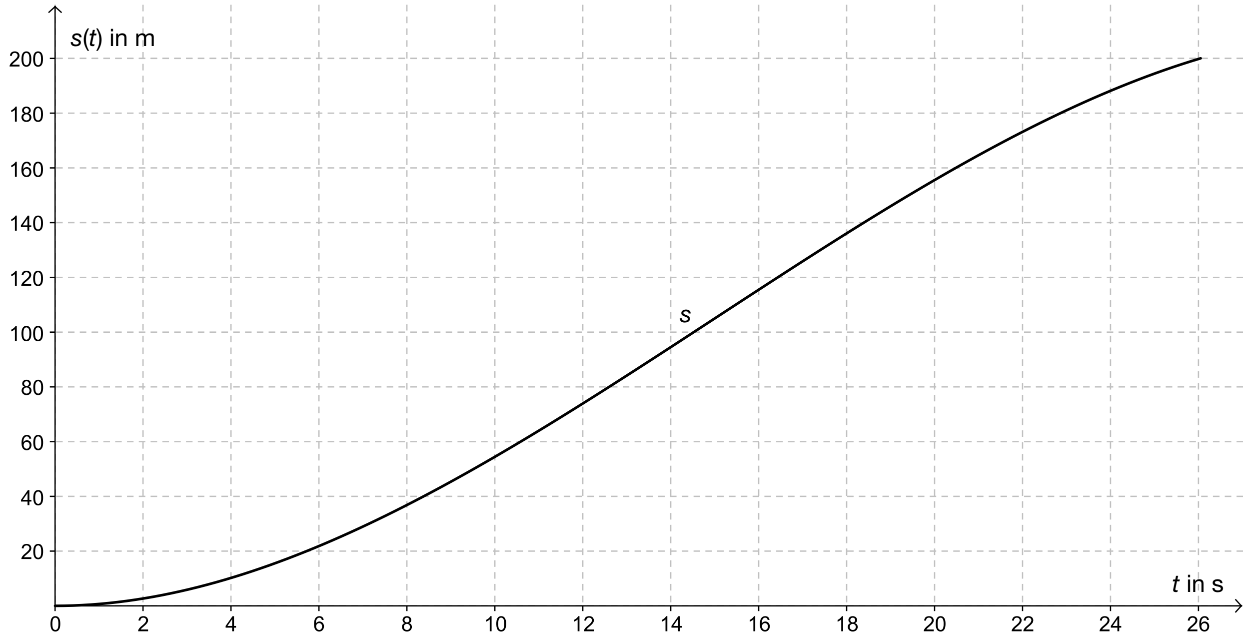
Aufgabe 1

200-m-Lauf

In der Leichtathletik gibt es für Läufer/innen spezielle Trainingsmethoden. Dazu werden Trainingspläne erstellt. Es ist dabei sinnvoll, bei Trainingsläufen Teilzeiten zu stoppen, um Stärken und Schwächen der Läuferin/des Läufers zu analysieren.

Zur Erstellung eines Trainingsplans für eine Läuferin wurden die Teilzeiten während eines Trainingslaufs gestoppt. Für die 200 Meter lange Laufstrecke wurden bei diesem Trainingslauf 26,04 Sekunden gemessen. Im nachstehenden Diagramm ist der zurückgelegte Weg $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t für diesen Trainingslauf mithilfe einer Polynomfunktion s vom Grad 3 modellhaft dargestellt.

Für die Funktion s gilt die Gleichung $s(t) = -\frac{7}{450}t^3 + 0{,}7t^2$ ($s(t)$ in Metern, t in Sekunden).



Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion s!

Interpretieren Sie die Bedeutung der Wendestelle in Bezug auf die Geschwindigkeit der Läuferin!

b) $\boxed{\text{A}}$ Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Läuferin für die 200 Meter lange Laufstrecke in Metern pro Sekunde!

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen in einem Intervall $[a; b]$ für eine Funktion f mindestens ein $x_0 \in (a; b)$ existiert, sodass $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ gilt. Interpretieren Sie diese Aussage im vorliegenden Kontext für die Funktion s im Zeitintervall $[0; 26{,}04]$!

Aufgabe 2

Altersbestimmung

Die Radiokohlenstoffdatierung, auch ^{14}C-Methode genannt, ist ein Verfahren zur Altersbestimmung von kohlenstoffhaltigen Materialien. Das Verfahren beruht darauf, dass in abgestorbenen Organismen die Menge an gebundenen radioaktiven ^{14}C-Atomen gemäß dem Zerfallsgesetz exponentiell abnimmt, während der Anteil an ^{12}C-Atomen gleich bleibt. Lebende Organismen sind von diesem Effekt nicht betroffen, da sie ständig neuen Kohlenstoff aus der Umwelt aufnehmen, sodass der ^{14}C-Anteil nahezu konstant bleibt und somit auch das Verhältnis zwischen ^{14}C und ^{12}C.

Die Anzahl der noch vorhandenen ^{14}C-Atome in einem abgestorbenen Organismus wird durch die Funktion N beschrieben. Für diese Anzahl $N(t)$ der ^{14}C-Atome t Jahre nach dem Tod des Organismus gilt daher näherungsweise die Gleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, wobei N_0 die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ angibt und die Zerfallskonstante für ^{14}C den Wert $\lambda = 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr hat.

Eine frische Probe enthält pro Billion (10^{12}) Kohlenstoffatomen nur ein ^{14}C-Atom. Die Nachweisgrenze von ^{14}C liegt bei einem Atom pro Billiarde (10^{15}) Kohlenstoffatomen (also einem Tausendstel der frischen Probe).

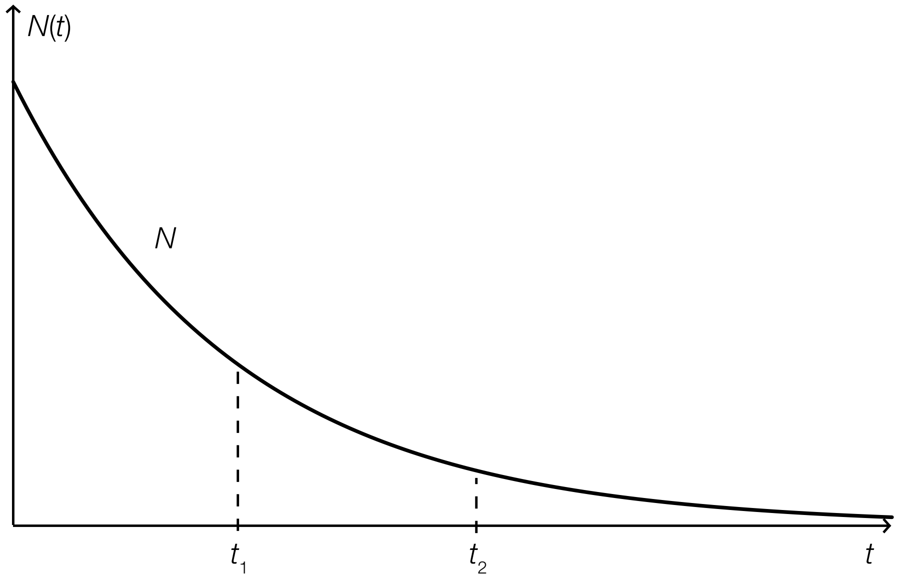
Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Berechnen Sie die Halbwertszeit von ^{14}C!

Zeigen Sie, dass nach zehn Halbwertszeiten die Nachweisgrenze von ^{14}C unterschritten ist!

b) Im Jahr 1991 wurde in den Ötztaler Alpen von Wanderern die Gletschermumie „Ötzi" entdeckt. Die ^{14}C-Methode ergab, dass bereits 47 % ± 0,5 % der ursprünglich vorhandenen ^{14}C-Atome zerfallen waren (d. h., das Messverfahren hat einen Fehler von ± 0,5 % der in der frischen Probe vorhandenen Anzahl an ^{14}C-Atomen).
Berechnen Sie ein Intervall für das Alter der Gletschermumie zum Zeitpunkt ihres Auffindens!

Angenommen, Ötzi wäre nicht im Jahr $t_1 = 1991$, sondern zu einem späteren Zeitpunkt t_2 gefunden worden.
Geben Sie an, welche Auswirkung auf die Breite des für das Alter der Gletschermumie ermittelten Intervalls dies hat (den gleichen Messfehler vorausgesetzt)!
Begründen Sie Ihre Aussage anhand der unten abgebildeten Grafik!



c) $N(t)$ beschreibt die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunkt t.
Interpretieren Sie $N'(t)$ im Hinblick auf den radioaktiven Zerfallsprozess!

Nach den Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls zerfällt pro Zeiteinheit ein konstanter Prozentsatz p der vorhandenen Menge an ^{14}C-Atomen.
Welche der folgenden Differenzengleichungen beschreibt diese Gesetzmäßigkeit? Kreuzen Sie die zutreffende Differenzengleichung an!

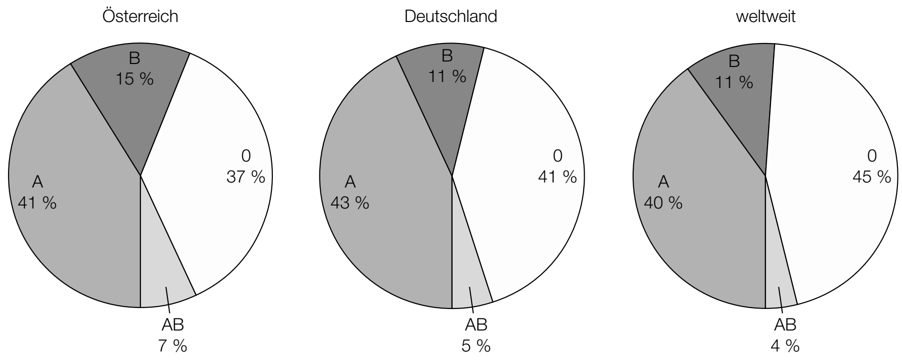
$N(t + 1) - N(t) = p$	☐
$N(t + 1) - N(t) = -p$	☐
$N(t + 1) - N(t) = p \cdot t$	☐
$N(t + 1) - N(t) = -p \cdot t$	☐
$N(t + 1) - N(t) = p \cdot N(t)$	☐
$N(t + 1) - N(t) = -p \cdot N(t)$	☐

Aufgabe 3

Blutgruppen

Die wichtigsten Blutgruppensysteme beim Menschen sind das AB0-System und das Rhesussystem. Es werden dabei die vier Blutgruppen A, B, AB und 0 unterschieden. Je nach Vorliegen eines bestimmten Antikörpers, den man erstmals bei Rhesusaffen entdeckt hat, wird bei jeder Blutgruppe noch zwischen *Rhesus-positiv* (+) und *Rhesus-negativ* (–) unterschieden. A– bedeutet z. B. Blutgruppe A mit Rhesusfaktor negativ.

In den nachstehenden Diagrammen sind die relativen Häufigkeiten der vier Blutgruppen in Österreich und Deutschland und im weltweiten Durchschnitt ohne Berücksichtigung des Rhesusfaktors dargestellt.



Die nachstehende Tabelle enthält die relativen Häufigkeiten der Blutgruppen in Deutschland und Österreich zusätzlich aufgeschlüsselt nach den Rhesusfaktoren.

	A+	A–	B+	B–	0+	0–	AB+	AB–
Deutschland	37 %	6 %	9 %	2 %	35 %	6 %	4 %	1 %
Österreich	33 %	8 %	12 %	3 %	30 %	7 %	6 %	1 %

Aufgrund von Unverträglichkeiten kann für eine Bluttransfusion nicht Blut einer beliebigen Blutgruppe verwendet werden. Jedes Kreuz (X) in der nachstehenden Tabelle bedeutet, dass eine Transfusion vom Spender zum Empfänger möglich ist.

	Spender							
Empfänger	0–	0+	B–	B+	A–	A+	AB–	AB+
AB+	X	X	X	X	X	X	X	X
AB–	X		X		X		X	
A+	X	X			X	X		
A–	X				X			
B+	X	X	X	X				
B–	X		X					
0+	X	X						
0–	X							

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Blutgruppe [26.11.2014]

Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Geben Sie diejenigen Blutgruppen an, die laut der abgebildeten Diagramme sowohl in Österreich als auch in Deutschland häufiger anzutreffen sind als im weltweiten Durchschnitt!

Jemand argumentiert anhand der gegebenen Diagramme, dass die Blutgruppe B in Deutschland und Österreich zusammen eine relative Häufigkeit von 13 % hat.
Entscheiden Sie, ob diese Aussage richtig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

b) Eine in Österreich lebende Person *X* hat Blutgruppe A–.

Geben Sie anhand der in der Einleitung angeführten Daten und Informationen die Wahrscheinlichkeit an, mit der diese Person *X* als Blutspender/in für eine zufällig ausgewählte, in Österreich lebende Person *Y* geeignet ist!

Wie viele von 100 zufällig ausgewählten Österreicherinnen/Österreichern kommen als Blutspender/in für die Person *X* in Frage? Geben Sie für die Anzahl der potenziellen Blutspender/innen näherungsweise ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall mit 90 % Wahrscheinlichkeit an!

c) In einer österreichischen Gemeinde, in der 1 800 Einwohner/innen Blut spenden könnten, nahmen 150 Personen an einer freiwilligen Blutspendeaktion teil. Es wird angenommen, dass die Blutspender/innen eine Zufallsstichprobe darstellen. 72 Blutspender/innen hatten Blutgruppe A.

Berechnen Sie aufgrund dieses Stichprobenergebnisses ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den tatsächlichen (relativen) Anteil p der Einwohner/innen dieser Gemeinde mit Blutgruppe A, die Blut spenden könnten!

Die Breite des Konfidenzintervalls wird vom Konfidenzniveau (Sicherheitsniveau) und vom Umfang der Stichprobe bestimmt. Geben Sie an, wie jeweils einer der beiden Parameter geändert werden müsste, um eine Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls zu erreichen! Gehen Sie dabei von einem unveränderten (gleichbleibenden) Stichprobenergebnis aus.

Bitte umblättern!

d) Blutgruppenmerkmale werden von den Eltern an ihre Kinder weitervererbt. Dabei sind die Wahrscheinlichkeiten in der nachstehenden Tabelle angeführt.

Blutgruppe der Eltern	mögliche Blutgruppe des Kindes			
	A	B	AB	0
A und A	93,75 %	–	–	6,25 %
A und B	18,75 %	18,75 %	56,25 %	6,25 %
A und AB	50 %	12,5 %	37,5 %	–
A und 0	75 %	–	–	25 %
B und B	–	93,75 %	–	6,25 %
B und AB	12,5 %	50 %	37,5 %	–
B und 0	–	75 %	–	25 %
AB und AB	25 %	25 %	50 %	–
AB und 0	50 %	50 %	–	–
0 und 0	–	–	–	100 %

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/AB0-System [26.11.2014]

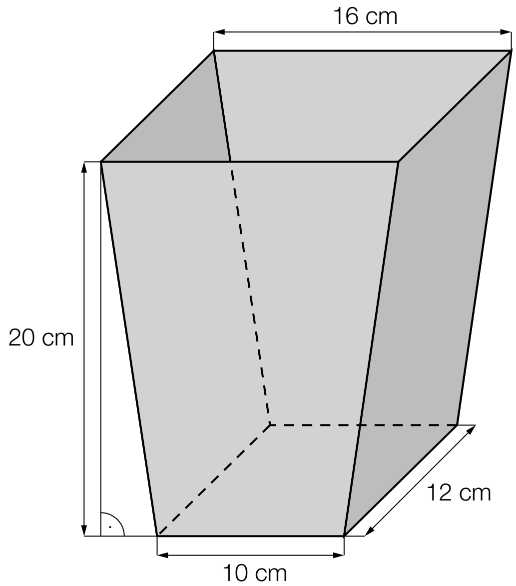
Eine Frau mit Blutgruppe A und ein Mann mit Blutgruppe 0 haben zwei (gemeinsame) leibliche Kinder.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder die gleiche Blutgruppe haben!

Ein Kind aus der Nachbarschaft dieser Familie hat Blutgruppe 0.
Gibt es eine Blutgruppe bzw. Blutgruppen, die der leibliche Vater dieses Kindes sicher nicht haben kann? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der gegebenen Daten!

Aufgabe 4

Füllen eines Gefäßes

Der Innenraum eines 20 cm hohen Gefäßes hat in jeder Höhe h eine rechteckige, horizontale Querschnittsfläche. Ihre Länge beträgt am Boden 10 cm und nimmt dann mit der Höhe linear bis auf 16 cm zu, ihre Breite beträgt in jeder Höhe 12 cm.



Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Geben Sie eine Formel für die Länge $a(h)$ der rechteckigen Querschnittsfläche in der Höhe h an!

In das Gefäß wird Flüssigkeit gefüllt.
Geben Sie an, was der Ausdruck $12 \cdot \int_0^{15} a(h)\,\mathrm{d}h$ in diesem Zusammenhang bedeutet!

b) Das leere Gefäß wird bis zum Rand mit Flüssigkeit gefüllt.
Nach t Sekunden befindet sich die Wassermenge $q(t)$ (in ml) im Gefäß. Die Füllung dauert 39 Sekunden. Für $t \in [0; 39]$ gilt: $q'(t) = 80$.

Interpretieren Sie $q'(t) = 80$ im gegebenen Zusammenhang!

Ermitteln Sie $\frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1}$ für beliebige t_1, t_2 mit $t_1 < t_2$ aus dem gegebenen Zeitintervall!

c) Das Fassungsvermögen des Gefäßes (in ml) bis zur Höhe x kann durch das Integral $\int_0^x (3{,}6 \cdot h + 120)\,\mathrm{d}h$ dargestellt werden.

Ermitteln Sie, bei welcher Höhe x das Wasser im Gefäß steht, wenn man 2,5 Liter Wasser in das Gefäß gießt!

Interpretieren Sie den im Integral vorkommenden Wert 3,6 im gegebenen Kontext!