

Ime	
Priimek	



Standardizirani, kompetenčno usmerjeni
pisni zrelostni izpit

Splošno izobraževalna višja šola (AHS)

11. maj 2015

Matematika

2. del – naloge



--

Navodila za reševanje nalog

Spoštovana kandidatka! Spoštovani kandidat!

Delovni zvezek z nalogami 2. dela, ki je pred Vami, vsebuje štiri naloge z vsakič po dvema do štirimi delnimi nalogami, pri čemer so vse delne naloge rešljive neodvisno druga od druge.

Na voljo imate 150 minut čistega časa za reševanje.

Uporabljajte pisalo v modri ali črni barvi, ki ga ni moč odstraniti z radirko. Pri konstrukcijskih nalogah lahko uporabite tudi svinčnik.

Za reševanje uporabljajte ta delovni zvezek in liste, ki so vam dani na razpolago! Svoje ime in priimek vpišite na prvi strani delovnega zvezka v za to predvideno polje in na vsak posamezni list, ki ga boste uporabili! Pri reševanju vsake posamezne delne naloge navedite njeno oznako!

Pri vrednotenju bo upoštevano vse, kar ni prečrtano. Rešitev naloge mora biti pri tem jasno razvidna. Če rešitev ni jasno razvidna, ali če so navedene različne rešitve, velja naloga za nerešeno. Svoje zapiske prečrtajte.

Pri reševanju smete uporabljati dovoljeno zbirko formul in običajne elektronske pripomočke.

Oddati je potrebno delovni zvezek in vse liste, ki jih boste uporabili.

Vrednotenje

Vsaka naloga iz 1. dela bo ovrednotena z 0 točk ali z 1 točko, vsaka delna naloga iz 2. dela pa z 0, 1 ali 2 točkama. Z označene zastavitve nalog bodo ovrednotene z 0 točk ali z 1 točko.

- Če bo v 1. delu pravilno rešenih vsaj 16 od 24 nalog, bo delo ocenjeno pozitivno.
- Če bo v 1. delu pravilno rešenih manj kot 16 od 24 nalog, bodo za izravnavo bistvenega območja znanja, v skladu z odredbo o ocenjevanju znanj, upoštewane z označene naloge iz 2. dela. Če bo ob upoštevanju z označenih nalog iz 2. dela vsaj 16 nalog pravilno rešenih, bo delo ocenjeno pozitivno. Če pa bo tudi z upoštevanjem z označenih nalog iz 2. dela pravilno rešenih manj kot 16 nalog, bo delo ocenjeno z »nezadostno«.
- Če bo v 1. delu (ob upoštevanju izravnalnih točk) doseženih vsaj 16 točk, se bo delo ocenjevalo po naslednjem ključu:

Genügend	zadostno	16 – 23 točk
Befriedigend	povoljno	24 – 32 točk
Gut	dobro	33 – 40 točk
Sehr gut	prav dobro	41 – 48 točk

Pojasnilo k formatom odgovorov

Nekatere naloge imajo *proste formate odgovorov*; pri tem Vaš odgovor vpišete v delovni zvezek neposredno pod vsakokratno zastavitev naloge. Nadaljnji formati odgovorov, ki lahko pridejo v poštev pri pisnem izpitu (klavzuri), so predstavljeni kot sledi:

Prirjevalni format: za ta format je značilno več izjav (oz. tabel ali slik), nasproti katerim stoji več možnosti odgovorov. Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da vsaki izjavi priredite ustrezno možnost odgovora z vnosom odgovoru pripadajoče črke!

Primer:
Dani sta dve enačbi.

$1 + 1 = 2$	A
$2 \cdot 2 = 4$	C

A	seštevanje
B	deljenje
C	množenje
D	odštevanje

Zastavitev naloge:
Danima enačbama priredite vsakič ustrezno oznako (izmed možnosti A do D)!

Konstruktivni format: Podana je naloga in zastavitev vprašanja. Naloga zahteva dopolnitev s točkami, premicami in/ali krivuljami v delovni zvezek.

Primer:
Dana je linearna funkcija f z $f(x) = k \cdot x + d$.

Zastavitev naloge:
V dani koordinatni sistem narišite graf linearne funkcije pri pogojih: $k = -2$ in $d > 0$!

Format multiple-choice v različici »1 izmed 6«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in šest možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati eno možnost odgovora. Naloge tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite edino pravilno možnost odgovora!

Primer:
Katera enačba je pravilna?

$1 + 1 = 1$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 2$	<input type="checkbox"/>
$3 + 3 = 3$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 8$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 5$	<input type="checkbox"/>
$6 + 6 = 6$	<input type="checkbox"/>

Zastavitev naloge:
S križcem označite ustrezno enačbo !

Format multiple-choice v različici »2 izmed 5«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in pet možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati dve možnosti odgovora. Naloge tega formata pravilno rešite tako, da s križcem označite obe pravilni možnosti odgovora!

Primer:
Kateri enačbi sta pravilni?

$1 + 1 = 1$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 3$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 8$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 5$	<input type="checkbox"/>

Zastavitev naloge:
S križcem označite obe ustrezni enačbi!

Format multiple-choice v različici »x izmed 5«: Za ta format odgovora je značilno eno osnovno vprašanje in pet možnosti odgovora, pri čemer je potrebno izbrati **eno, dve, tri, štiri ali pet možnosti odgovora**. V zastavitvi naloge vedno najdete zahtevo »S križcem označite veljavno(-e) izjavo(-e)/ enačbo(-e)/ ...!« Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da s križcem označite pravilno možnost/ pravilne možnosti odgovora!

Primer:
Katera(-e) izmed navedenih enačb je/ so pravilna(-e)?

$1 + 1 = 2$	<input checked="" type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 6$	<input checked="" type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input type="checkbox"/>
$5 + 5 = 10$	<input checked="" type="checkbox"/>

Zastavitev naloge:
S križcem označite ustrezno(-e) enačbo(-e)!

Luknjičasto besedilo: Za ta format odgovora je značilen stavek z dvema vrzelima (luknjama), kar pomeni, da sta v besedilu naloge izpostavljeni dve mesti, ki ju je potrebno dopolniti. Za vsako vrzel (luknjo) so podane tri možnosti vnosa. Naloge tega formata ustrezno rešite tako, da za vsako od vrzel (lukenj) s križcem označite pravilno možnost vnosa!

Primer:
Dane so 3 enačbe.

Zastavitev naloge:
V naslednjem stavku dopolnite vrzeli (luknje) v besedilu na tak način, da s križcem označite vsakič ustrezne dele stavka tako, da nastane pravilna izjava!

Operacija, predstavljena z enačbo _____ ① _____, se imenuje izračunanje vsote ali _____ ② _____.

①	
$1 - 1 = 0$	<input type="checkbox"/>
$1 + 1 = 2$	<input checked="" type="checkbox"/>
$1 \cdot 1 = 1$	<input type="checkbox"/>

②	
množenje (multiplikacija)	<input type="checkbox"/>
odštevanje (subtrakcija)	<input type="checkbox"/>
seštevanje (adicija)	<input checked="" type="checkbox"/>

Tako spremenite svoj odgovor pri nalogah, pri katerih je potrebno označevanje s križcem:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato vrišite križec v zeleni okvirček.

$1 + 1 = 3$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 5$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input type="checkbox"/>
$5 + 5 = 9$	<input checked="" type="checkbox"/>

Tukaj je bil prvotno izbran odgovor » $5 + 5 = 9$ «, nato pa spremenjen na » $2 + 2 = 4$ «.

Tako ponovno izberete že prebarvani odgovor:

1. Prebarvajte okvirček z odgovorom, ki več ne velja.
2. Nato obkrožite zeleni prebarvani okvirček.

$1 + 1 = 3$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 5$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 9$	<input type="checkbox"/>

Tukaj je bil odgovor » $2 + 2 = 4$ « najprej prebarvan in nato ponovno izbran.

Če imate še kakšno vprašanje, se prosimo obrnite na svojo učiteljico/ svojega učitelja!

Veliko uspeha pri reševanju!

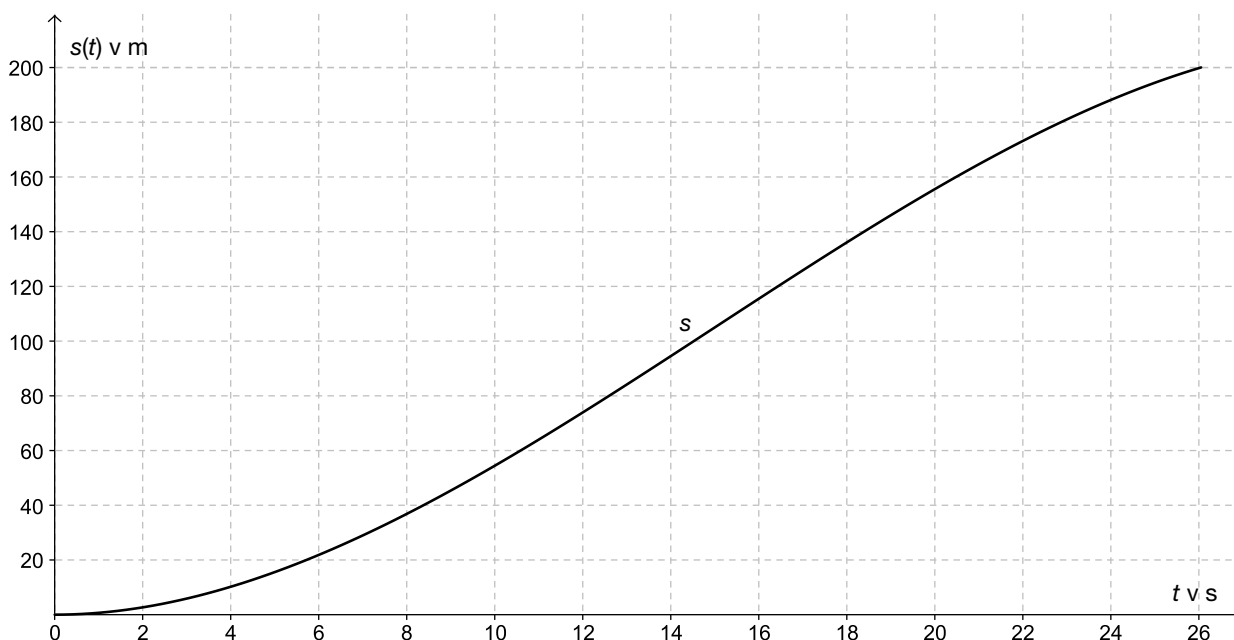
Naloga 1

Tek na 200 m

V lahki atletiki se za tekače in tekačice uporabljajo specialne metode treninga. V ta namen je potrebno sestaviti načrte treninga. Pri tem je smiselno, pri tekih na treningu meriti vmesne čase, da bi lahko analizirali šibke točke in prednosti tekača oz. tekačice.

Za sestavo načrta treninga za neko tekačico smo izmerili njene vmesne čase pri nekem teku na treningu. Za 200 metrov dolgo tekaško progo je bilo pri tem teku treninga izmerjenih 26,04 sekund. V spodnjem diagramu je za ta tek s pomočjo polinomske funkcije 3. stopnje modelno predstavljena opravljena pot $s(t)$ v odvisnosti od časa t .

Za funkcijo s velja enačba $s(t) = -\frac{7}{450}t^3 + 0,7t^2$ ($s(t)$ v metrih, t v sekundah).



Zastavitev naloge:

- a) Izračunajte mesto obračaja (prevoja) funkcije s !

Interpretirajte pomen mesta obračaja v povezavi s hitrostjo tekačice.

- b) A Določite povprečno hitrost tekačice za to 200 metrov dolgo progo v metrih na sekundo.

Izrek o srednji vrednosti v diferencialnem računu pravi, da obstoja pri določenih predpostavkah na nekem intervalu $[a; b]$ za funkcijo f najmanj en takšen $x_0 \in (a; b)$, da velja

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretirajte to izjavo v danem kontekstu za funkcijo s v časovnem intervalu $[0; 26,04]$!

Naloga 2

Določanje starosti

Določanje starosti z radiokarbonskim datiranjem, imenovano tudi metoda C14, je postopek za določanje starosti materialov, ki vsebujejo ogljik. Postopek sloni na tem, da v odmrlih organizmih količina vezanih ^{14}C -atomov v skladu z zakonom o razpadu eksponentno upada, medtem ko ostaja delež ^{12}C -atomov nespremenjen. Živi organizmi temu efektu niso podvrženi, ker nenehno sprejemajo novi ogljik iz okolja, tako da ostaja delež ^{14}C skorajda nespremenjen in s tem tudi razmerje med ^{14}C in ^{12}C .

Število še prisotnih ^{14}C -atomov v nekem odmrlem organizmu je opisano s funkcijo N . Za to število $N(t)$ ^{14}C -atomov t let po smrti organizma, velja v približku enačba $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, pri čemer je z N_0 podano število ^{14}C -atomov v trenutku $t = 0$ in ima razpadna konstanta za ^{14}C vrednost $\lambda = 1,21 \cdot 10^{-4}$ na leto.

Sveži vzorec vsebuje na bilijon (10^{12}) ogljikovih atomov samo en ^{14}C -atom. Dokazna meja za ^{14}C je pri enem atomu na bilijardo (10^{15}) ogljikovih atomov (torej pri tisočinki svežega vzorca).

Zastavitev naloge:

a) Izračunajte razpolovni čas za ^{14}C !

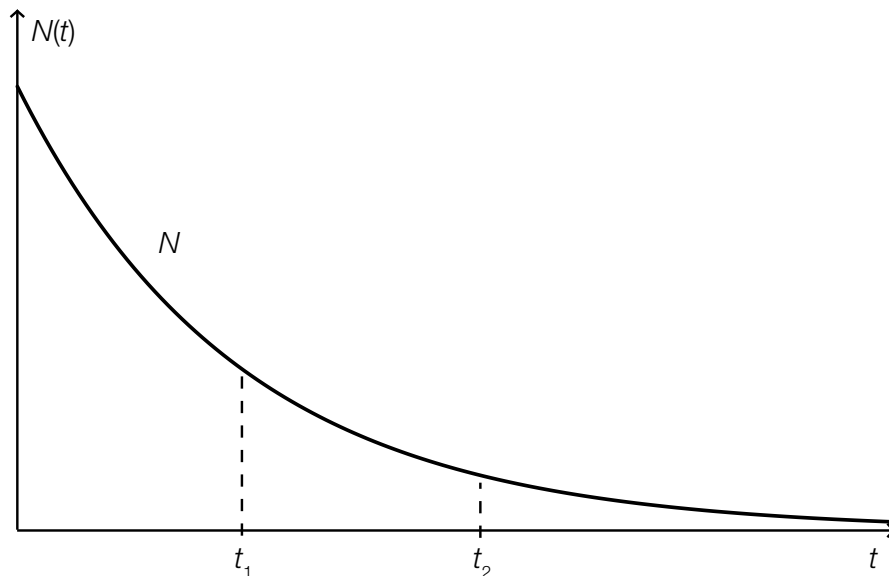
Prikažite, da po desetih razpolovilnih obdobjih dokazna meja ^{14}C še ni dosežena.

b) Leta 1991 so planinci v Ötztalskih alpah odkrili ledeniško mumijo »Ötzi«. ^{14}C -metoda je pokazala, da je že $47\% \pm 0,5\%$ od prvotno prisotnih ^{14}C -atomov razpadlo (to pomeni: merilna metoda ima napako $\pm 0,5\%$ od v svežem vzorcu prisotnega števila ^{14}C -atomov). Izračunajte interval za starost ledeniške mumije v trenutku, ko so jo našli.

Recimo, da Ötzi ne bi bil najden v letu $t_1 = 1991$, ampak v nekem kasnejšem časovnem trenutku t_2 .

Navedite, kakšen učinek bi imelo to na širino izračunanega intervala starosti ledeniške mumije (če predpostavimo enako napako meritve)!

Utemeljite vašo izjavo na podlagi spodaj predstavljene grafike.



- c) $N(t)$ opisuje število ^{14}C -atomov v časovnem trenutku t .
 Interpretirajte $N'(t)$ glede na proces radioaktivnega razpada!

Po zakonitostih radioaktivnega razpada razpade na časovno enoto konstantna odstotna stopnja p prisotne količine ^{14}C -atomov.

Katera od naslednjih diferencialnih enačb opisuje to zakonitost? S križcem označite ustrezno diferencialno enačbo!

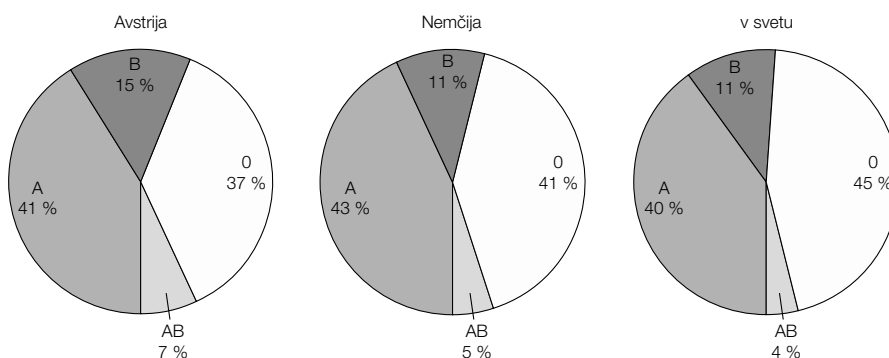
$N(t + 1) - N(t) = p$	<input type="checkbox"/>
$N(t + 1) - N(t) = -p$	<input type="checkbox"/>
$N(t + 1) - N(t) = p \cdot t$	<input type="checkbox"/>
$N(t + 1) - N(t) = -p \cdot t$	<input type="checkbox"/>
$N(t + 1) - N(t) = p \cdot N(t)$	<input type="checkbox"/>
$N(t + 1) - N(t) = -p \cdot N(t)$	<input type="checkbox"/>

Naloga 3

Krvne skupine

Najpomembnejša sistema krvnih skupin pri človeku sta sistem ABO in sistem Rezus (*Rhesus-system*). Pri tem ločimo štiri krvne skupine: A, B, AB in O. Glede na prisotnost določenih protiteles, ki so jih prvotno odkrili pri opicah iz rodu rezusov, se pri vsaki krvni skupini razlikuje še med Rezus-pozitivnim (+) in Rezus-negativnim (-). A- pomeni npr. krvno skupino A z negativnim Rezus faktorjem.

V naslednjih diagramih so predstavljene relativne pogostosti štirih krvnih skupin v Avstriji in Nemčiji in v svetovnem povprečju, brez upoštevanja Rezus faktorja.



Spodnja tabela vsebuje relativne pogostosti (relativne frekvence) krvnih skupin v Nemčiji in Avstriji, dodatno razdeljene še po Rezus faktorjih.

	A+	A-	B+	B-	O+	O-	AB+	AB-
Nemčija	37 %	6 %	9 %	2 %	35 %	6 %	4 %	1 %
Avstrija	33 %	8 %	12 %	3 %	30 %	7 %	6 %	1 %

Zaradi neskladnosti med nekaterimi krvnimi skupinami, za transfuzijo krvi ne more biti uporabljena kri neke poljubne krvne skupine. Vsak križec (X) v spodnji tabeli pomeni, da je transfuzija med darovalcem in prejemnikom možna.

Prejemnik	Darovalec							
	O-	O+	B-	B+	A-	A+	AB-	AB+
AB+	X	X	X	X	X	X	X	X
AB-	X		X		X		X	
A+	X	X			X	X		
A-	X				X			
B+	X	X	X	X				
B-	X		X					
O+	X	X						
O-	X							

Vir podatkov: <https://de.wikipedia.org/wiki/Blutgruppe> [26.11.2014]

Zastavitev naloge:

- a) A Navedite tiste krvne skupine, ki jih v skladu s prikazanimi diagrami tako v Avstriji kot tudi v Nemčiji srečamo pogosteje kot v svetovnem povprečju!
Nekdo je na podlagi danih diagramov argumentiral, da ima krvna skupina B v Nemčiji in Avstriji skupaj relativno pogostost (relativno frekvenco) 13 %.
Odločite, ali je ta izjava pravilna in utemeljite svojo odločitev!

- b) Neka v Avstriji živeča oseba X ima krvno skupino A–.

Na podlagi podatkov in informacij, navedenih v uvodu, navedite verjetnost, s katero je ta oseba X primeren/(-na) darovalec/darovalka krvi za slučajno izbrano, v Avstriji živečo osebo Y !

Koliko od 100 slučajno izbranih Avstrijcev/Avstrijk pride v poštev kot darovalec/darovalka za osebo X ? Za število potencialnih darovalcev/darovalk približno navedite simetrični interval z 90 % verjetnostjo za pričakovano vrednost (matematično upanje)!

- c) V neki avstrijski občini, v kateri bi lahko kri darovalo 1 800 prebivalcev/prebivalk, se je prostovoljne krvodajalske akcije udeležilo 150 oseb. Predpostavimo, da predstavlja ta skupina krvodajalcev/krvodajalk slučajni vzorec. 72 krvodajalcev/krvodajalk je imelo krvno skupino A.

Na podlagi tega rezultata za vzorec, izračunajte simetrični 95 % konfidenčni interval (interval zaupanja) za dejanski (relativni) delež p prebivalcev/prebivalk te občine s krvno skupino A, ki bi lahko darovali kri.

Širina konfidenčnega intervala (intervala zaupanja) je določena s konfidenčnim nivojem (varnostnim nivojem) in z velikostjo vzorca. Navedite, kako je potrebno vsakič spremeniti enega od obeh parametrov, da bi dosegli zmanjšanje širine konfidenčnega intervala! Pri tem izhajajte iz nespremenjenega (konstantnega) rezultata vzorca.

Prosimo obrnite list!

- d) Značilnosti krvnih skupin se od staršev dedno prenašajo na njihove otroke. Pri tem so ustrezne verjetnosti navedene v spodnji tabeli.

krvna skupina staršev	verjetna krvna skupina otroka			
	A	B	AB	0
A in A	93,75 %	–	–	6,25 %
A in B	18,75 %	18,75 %	56,25 %	6,25 %
A in AB	50 %	12,5 %	37,5 %	–
A in 0	75 %	–	–	25 %
B in B	–	93,75 %	–	6,25 %
B in AB	12,5 %	50 %	37,5 %	–
B in 0	–	75 %	–	25 %
AB in AB	25 %	25 %	50 %	–
AB in 0	50 %	50 %	–	–
0 in 0	–	–	–	100 %

Vir: <https://de.wikipedia.org/wiki/AB0-System> [26.11.2014]

Ženska s krvno skupino A in moški s krvno skupino 0 imata dva (skupna) biološka otroka. Izračunajte verjetnost, da imata oba otroka isto krvno skupino!

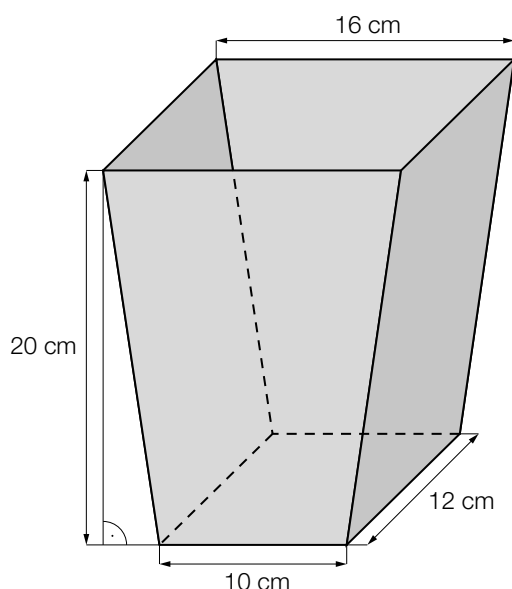
Neki otrok iz soseščine te družine ima krvno skupino 0.

Ali je katera krvna skupina, oz. so katere krvne skupine, taka (take), ki je/jih biološki oče tega otroka zagotovo ne bi mogel imeti? Utemeljite svoj odgovor na podlagi danih podatkov!

Naloga 4

Polnjenje posode

Notranjost neke 20 cm visoke posode ima na vsaki višini h horizontalno (vodoravno) prečno-presečno ploskev v obliki pravokotnika. Dolžina posode znaša pri dnu 10 cm in se nato z višino linearno veča do 16 cm, njena širina pa znaša na vsaki višini 12 cm.



Zastavitev naloge:

- a) A Zapišite formulo za dolžino $a(h)$ pravokotniške prečno-presečne ploskve na višini h !

V posodo nalivamo tekočino.

Navedite, kaj v tej zvezi pomeni izraz $12 \cdot \int_0^{15} a(h) dh$!

- b) Prazno posodo do roba napolnimo s tekočino.

Po t sekundah se v posodi nahaja količina vode $q(t)$ (v ml). Polnjenje traja 39 sekund.

Za $t \in [0; 39]$ velja: $q'(t) = 80$.

Interpretirajte $q'(t) = 80$ v dani povezavi.

Določite $\frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1}$ za poljubna t_1, t_2 pri $t_1 < t_2$ iz danega časovnega intervala!

- c) Prostornino posode (v ml) do višine x je moč predstaviti z integralom: $\int_0^x (3,6 \cdot h + 120) dh$.

Določite do katere višine x je posoda napolnjena z vodo, če smo vanjo zlili 2,5 litrov vode!

V danem kontekstu interpretirajte vrednost 3,6, ki nastopa v integralu!

