Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2015

Mathematik

Kompensationsprüfung
Angabe für **Prüfer/innen**

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen
Bundesinstitut bifie

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Archäologie

In der Archäologie gibt es eine empirische Formel, um von der Länge eines entdeckten Oberschenkelknochens auf die Körpergröße der zugehörigen Person schließen zu können.

Für Männer gilt näherungsweise:

$h = 48{,}8 + 2{,}63 \cdot l$

Dabei beschreibt l die Länge des Oberschenkelknochens und h die Körpergröße. Beides wird in Zentimetern (cm) angegeben.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Körpergröße eines Mannes, dessen Oberschenkelknochen eine Länge von 50 cm aufweist!

Besteht zwischen den Größen l und h eine direkte Proportionalität? Begründen Sie Ihre Antwort!

Leitfrage:

Für Frauen gilt eine analoge Formel:

$h = a + b \cdot l$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

Eine Frau mit einer Körpergröße von 163,4 cm hat eine Oberschenkelknochenlänge von 45 cm. Bei einer Frau mit einer Körpergröße von 170,6 cm ist der Oberschenkelknochen um 3 cm länger.

Bestimmen Sie aufgrund dieser Daten die Belegung der Parameter a und b!

Deuten Sie den Wert von b in der angegebenen Formel!

Lösung zur Aufgabe 1

Archäologie

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

h = 180,3 cm

Zwischen l und h besteht keine direkte Proportionalität, da bei einer Verdoppelung, Verdreifachung, … von l der Wert von h nicht verdoppelt, verdreifacht, … wird.
Das Verhältnis der Größen h und l ist nicht konstant.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl der Wert von h als auch eine (sinngemäß) korrekte Begründung angegeben werden.
Toleranzintervall für h: [180 cm; 181 cm]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

a = 55,4 cm
b = 2,4 (*b* ist dimensionslos; dies muss aber nicht erkannt werden)

b ist die Steigung der Funktion, die die Körpergröße in Abhängigkeit von der Länge des Oberschenkelknochens angibt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Parameter *a* und *b* richtig berechnet werden und die Deutung des Wertes *b* (sinngemäß) der Lösungserwartung entspricht.
Toleranzintervall für *a*: [55 cm; 56 cm]
Toleranzintervall für *b*: [2,3; 2,6]

Aufgabe 2

Lagebeziehungen von Geraden im Raum

Gegeben sind zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$.

Die Gerade g ist durch eine Parameterdarstellung $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ festgelegt.

Die Gerade h verläuft durch die Punkte $A = (0|8|0)$ und $B = (-2|28|6)$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser beiden Geraden und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Erläutern Sie, welche weiteren Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden a und b in $\mathbb{R}^3$ mit den Parameterdarstellungen $a\colon X = P + r \cdot \vec{a}$ und $b\colon X = Q + s \cdot \vec{b}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$) auftreten können! Geben Sie für jeden dieser Fälle an, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit diese Lagebeziehung auftritt!

Lösung zur Aufgabe 2

Lagebeziehungen von Geraden im Raum

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Berechnung:

$$h\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I:} & 3 + t = -2s \\ \text{II:} & -4 - t = 8 + 20s \\ \text{III:} & -7 - 2t = 6s \end{array}\right\} \Rightarrow\ t = -2 \ \text{ bzw. } \ s = -0{,}5 \ \Rightarrow\ S = (1|-2|-3)$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten des Schnittpunktes richtig ermittelt werden und die Vorgehensweise schlüssig erklärt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Zwei Geraden a und b in $\mathbb{R}^3$ können außer schneidend auch zueinander parallel, ident oder windschief sein.

- a und b sind parallel, wenn gilt: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ und $P \notin b$ bzw. $Q \notin a$.
- a und b sind ident, wenn gilt: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ und $P \in b$ bzw. $Q \in a$ oder $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{a} \parallel \vec{b}$.
- a und b sind windschief, wenn gilt: $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ und $a \cap b = \{\}$, d. h. $\nexists\ (r; s)$, sodass $P + r \cdot \vec{a} = Q + s \cdot \vec{b}$ gilt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die drei weiteren Lagebeziehungen genannt und der Lösungserwartung (sinngemäß) entsprechende Voraussetzungen angegeben werden.

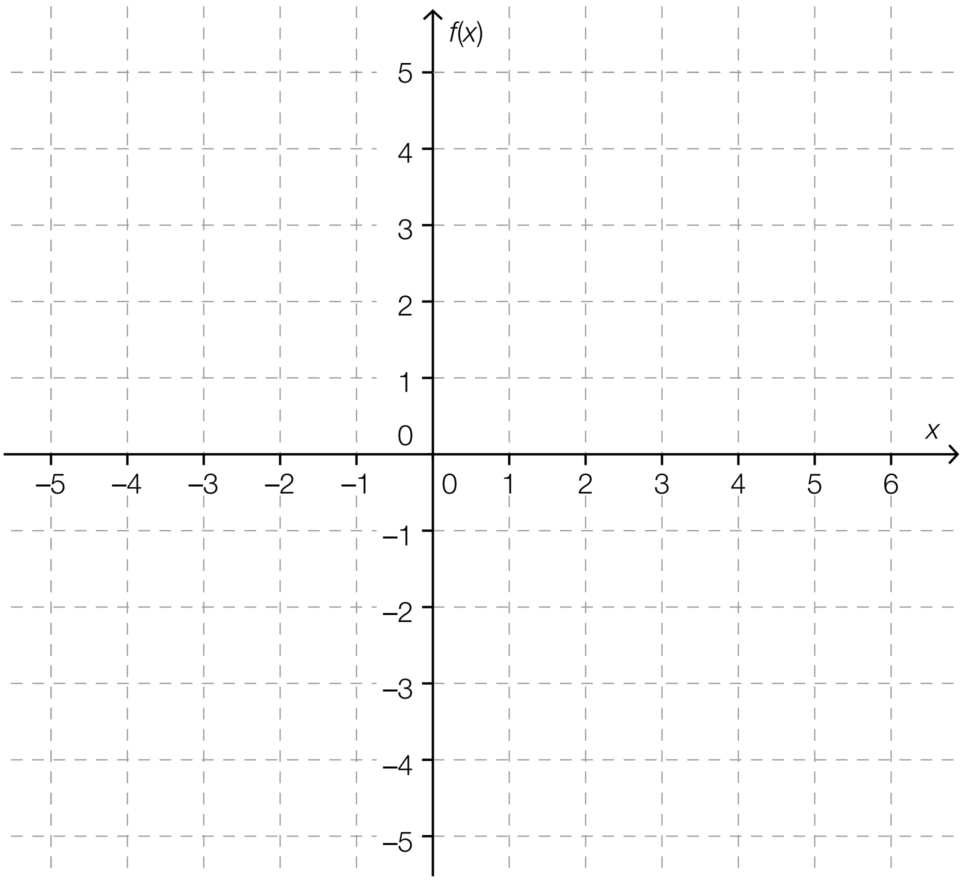
Aufgabe 3

Quadratische Funktion und ihre Nullstellen

Gegeben ist eine quadratische Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a \neq 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen quadratischen Funktion, die in $P = (0|-1)$ ein lokales Minimum (einen Tiefpunkt) hat, und geben Sie die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion an!
Geben Sie auch an, welche Werte für die Parameter a und b in diesem Fall möglich sind!



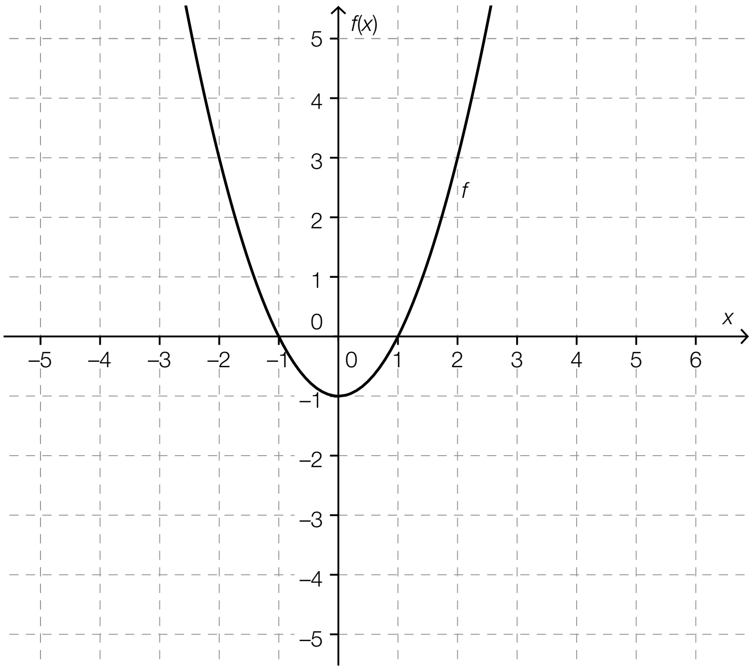
Leitfrage:

Geben Sie an, wie die Anzahl der Nullstellen einer quadratischen Funktion von den Parametern a und b der Funktion abhängt!

Lösung zur Aufgabe 3

Quadratische Funktion und ihre Nullstellen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Diese Funktion hat jedenfalls zwei Nullstellen. Der Parameter a ist in diesem Fall positiv und $b = -1$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph der Funktion als nach oben offene Parabel erkennbar ist und zwei Nullstellen hat und die Bedingungen für die Parameter korrekt angegeben werden.
Jede nach oben geöffnete Parabel, die ihren Scheitel in $(0|-1)$ hat, ist als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$a > 0$ und $b < 0 \;\Rightarrow\;$ zwei Nullstellen
$a < 0$ und $b > 0 \;\Rightarrow\;$ zwei Nullstellen

a beliebig und $b = 0 \;\Rightarrow\;$ eine Nullstelle

$a > 0$ und $b > 0 \;\Rightarrow\;$ keine Nullstelle
$a < 0$ und $b < 0 \;\Rightarrow\;$ keine Nullstelle

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle fünf Fälle (sinngemäß) korrekt angeführt werden.

Aufgabe 4

Gewinn und Kosten

Gegeben ist die Gewinnfunktion G mit der Gleichung $G(x) = -x^2 + 90 \cdot x - 1800$. Dabei wird x in Stück und $G(x)$ in Euro angegeben.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den maximalen Gewinn!

Leitfrage:

Der Verkaufspreis beträgt € 7 pro Stück. Die Kosten $K(x)$ in Euro zur Herstellung von x Stück werden durch die Kostenfunktion K beschrieben. Stellen Sie eine Gleichung der Kostenfunktion K auf und berechnen Sie $K(50)$!

Lösung zur Aufgabe 4

Gewinn und Kosten

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$G'(x) = -2 \cdot x + 90$
$G'(x) = 0$
$x = 45$
$G(45) = 225$

Der maximale Gewinn beträgt € 225.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der maximale Gewinn korrekt berechnet wird. Die Angabe von 45 Stück alleine reicht nicht aus.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$-x^2 + 90 \cdot x - 1\,800 = 7 \cdot x - K(x)$
$K(x) = x^2 - 83 \cdot x + 1\,800$
$K(50) = 150$

Die Kosten zur Herstellung von 50 Stück betragen € 150.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Funktionsgleichung und der Wert von € 150 richtig angegeben werden. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 5

Mittelwerte von Datenreihen

Bei einer Verkehrskontrolle in einem Ortsbereich (Geschwindigkeitsbeschränkung 50 km/h) wurden die Geschwindigkeiten von 20 Fahrzeugen gemessen. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle aufgezeichnet.

v in km/h	45	47	48	50	51	52	54	89
Anzahl	2	3	5	2	2	2	3	1

Aufgabenstellung:

Geben Sie das arithmetische Mittel, den Median (Zentralwert) und den Modus (Modalwert) der gemessenen Geschwindigkeiten an! Geben Sie an, ob in diesem Fall das arithmetische Mittel oder der Median aussagekräftiger ist, und begründen Sie Ihre Aussage!

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Nicht immer erlauben erhobene Daten die Bestimmung aller Mittelwerte.

Bei einer Befragung wurden Daten zu den Autos der befragten Personen erhoben, und zwar im Hinblick auf die Farbe des Autos, die Zufriedenheit mit dem Auto (in den vier Stufen „sehr zufrieden", „zufrieden", „wenig zufrieden", „nicht zufrieden") und das Alter des Autos (in Jahren).

Geben Sie an, welcher Mittelwert prinzipiell für die angegebenen Merkmale bestimmt werden kann! Ergänzen Sie dazu die nachstehende Tabelle, indem Sie die Mittelwerte, die bei den entsprechenden Merkmalen bestimmt werden können, ankreuzen! Begründen Sie Ihre Vorgehensweise!

	Autofarbe	Zufriedenheit mit dem Auto	Alter des Autos
Modus			
Median			
arithmetisches Mittel			

Lösung zur Aufgabe 5

Mittelwerte von Datenreihen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Modus = 48; häufigster Wert einer Datenreihe

Median = 49; mittlerer Wert einer geordneten Datenreihe

arithmetisches Mittel = 51,4; Summe der Werte einer Datenreihe / Anzahl der Werte

Der Median ist in diesem Fall aussagekräftiger als das arithmetische Mittel, weil der „Ausreißer 89" das arithmetische Mittel erhöht.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle drei Werte richtig bestimmt werden und die Aussagekraft des arithmetischen Mittels (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

	Autofarbe	Zufriedenheit mit dem Auto	Alter des Autos
Modus	X	X	X
Median		X	X
arithmetisches Mittel		(X)*	X

Mögliche Begründungen:
- Farbe: Es besteht nur die Möglichkeit, die am häufigsten vorkommende Farbe, also den Modus anzugeben. Eine Bestimmung des Medians ist nicht möglich, da keine Rangordnung vorliegt.
- Zufriedenheit: Eine Rangordnung ist festgelegt, dadurch ist neben der Angabe der am häufigsten vorkommenden Zufriedenheitsstufe (Modus) auch die Angabe des Medians möglich.
- Das Alter des Autos wird in Jahren angegeben. Die Berechnung des arithmetischen Mittels (Durchschnittsalter) ist möglich. Die Liste kann geordnet werden, wodurch die Bestimmung des Medians möglich ist. Das häufigste in der Liste vorkommende Alter ist der Modus.

* Eine Bestimmung des arithmetischen Mittels wäre dann möglich, wenn man der Zufriedenheit Punkte wie etwa 0 (nicht zufrieden), 1, 2 und 3 (sehr zufrieden) zuordnet – in diesem Fall ist das Kreuz richtig gesetzt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Kreuze richtig gesetzt werden und das Setzen der Kreuze (sinngemäß) richtig begründet wird.